

经全国中小学教材审定委员会
2005年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-4

坐标系与参数方程

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学教材实验研究组



人民教育出版社
B 版

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-4

坐标系与参数方程

人民教育出版社 课程教材研究所 编著
中学数学教材实验研究组



主 编 高存明

编 者 张润琦

责任编辑 龙正武

美术编辑 李宏庆 王 喆

封面设计 李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数 学

选修 4-4

B 版

坐标系与参数方程

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社 出版发行

网址: <http://www.pep.com.cn>

北京瑞诚印刷有限公司印装 全国新华书店经销

开本: 890 毫米 × 1 240 毫米 1/16 印张: 4.5 字数: 100 000

2007 年 4 月第 2 版 2010 年 4 月第 23 次印刷

ISBN 978-7-107-18773-5 定价: 4.65 元
G · 11863 (课)

著作权所有 · 请勿擅用本书制作各类出版物 · 违者必究

如发现印、装质量问题, 影响阅读, 请与本社出版科联系调换。

(联系地址: 北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编: 100081)

本册导引

2003年10月15日,我国“神舟五号”载人飞船成功发射并进入预定的椭圆轨道,其近地点为200 km,远地点为350 km.同学们想一想,如何由这两个数据求出轨道曲线的重要参数呢?当你学习和研究了本书的第一章后,用极坐标方法此问题就可以迎刃而解.

在听天气预报时,常有热带风暴的预告,其中要预告风暴当时所在地的经纬度.如何通过经度和纬度两个数据去了解风暴所处的位置呢?当你学习了空间点的球坐标后,就会精确地理解经纬度的含义.

当你晚上行走时,或许会碰上这样一个热爱生活的骑车人,他在车轮的辐条上安装了一个彩色小灯泡.当他骑车前行时,小灯泡就划出了一条漂亮的彩色曲线.而这种曲线竟有十分广泛的应用.你想知道描述这种曲线的数学形式吗?本书的第二章将会给你一个答复.

同学们在数学2中学习了解析几何的基本知识,在选修课中学习了圆锥曲线的性质及表示该曲线的直角坐标方程,这些都是平面解析几何的基本内容.本专题是坐标系与参数方程,它也是解析几何的一个重要内容.

坐标系是解析几何的基础.在坐标系中,可以用有序数组确定点的位置,进而用方程刻画几何图形.为了便于用代数方法刻画几何图形或描述自然现象,需要建立不同的坐标系.极坐标系是在平面上建立的不同于直角坐标系的坐标系;柱坐标系和球坐标系是在空间中建立的不同于直角坐标系的坐标系.对于有些几何图形,选用这类坐标系可以使建立的相应方程更简单.

参数方程是以参变量为中介来表示曲线上点的坐标的方程,它是曲线在同一坐标系下的又一种表示形式.某些曲线用参数方程表示比用普通方程表示更方便.

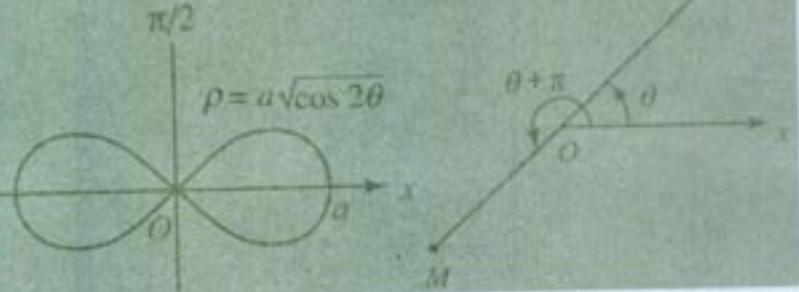
本专题的重点内容是极坐标和参数方程,它是学习高等数学的必备数学基础知识.在本专题中还借助于计算机软件演示一些常见曲线的产生过程,指出它们的应用,对重要曲线推导出相应的参数方程.

目 录

第一章 坐标系	1
1.1 直角坐标系, 平面上的伸缩变换	1
◆ 1.1.1 直角坐标系	1
◆ 1.1.2 平面上的伸缩变换	2
1.2 极坐标系	6
◆ 1.2.1 平面上点的极坐标	6
◆ 1.2.2 极坐标与直角坐标的关系	8
1.3 曲线的极坐标方程	10
1.4 圆的极坐标方程	13
◆ 1.4.1 圆心在极轴上且过极点的圆	14
◆ 1.4.2 圆心在点 $(a, \frac{\pi}{2})$ 处且过极点的圆	15
探索与研究	
圆锥曲线的极坐标方程	17
1.5 柱坐标系和球坐标系	20
◆ 1.5.1 柱坐标系	20
[图形演示] 柱坐标系	21
◆ 1.5.2 球坐标系	21
[图形演示] 球坐标系	23
本章小结	24
阅读与欣赏	
常见曲线的极坐标方程	27
1. 阿基米德螺线	27
[图形演示] 阿基米德螺线	27
2. 心形线	27
[图形演示] 心形线的一种生成过程	28
3. 双纽线	28
[图形演示] 双纽线	29

第二章 参数方程	30
2.1 曲线的参数方程	30
◆ 2.1.1 抛射体的运动	30
◆ 2.1.2 曲线的参数方程	32
2.2 直线和圆的参数方程	34
◆ 2.2.1 直线的参数方程	35
◆ 2.2.2 圆的参数方程	39
2.3 圆锥曲线的参数方程	41
◆ 2.3.1 椭圆的参数方程	41
◆ 2.3.2 抛物线的参数方程	44
◆ 2.3.3 双曲线的参数方程	45
2.4 一些常见曲线的参数方程	47
◆ 2.4.1 摆线的参数方程	47
[图形演示] 摆线的生成过程	49
◆ 2.4.2 圆的渐开线的参数方程	50
[图形演示] 圆的渐开线	51
本章小结	53
[本专题的学习总结报告]	55
阅读与欣赏	
星形线和内摆线	57
[图形演示] 星形线的生成过程	59
变幅摆线	59
心形线和外摆线	60
贝努利兄弟	61
 附录	
部分中英文词汇对照表	64
后记	65

坐标系



在生产实践中，随着活动范围的扩大和对精度要求的提高，特别是适应描写和掌握运动规律的要求，人们就需要比较精确地刻画一个物体的位置。刻画一个物体位置的方法就是选取几个物体作参考，按一定的方法来标明这一物体与它们的相互位置关系。在有了一定的度量单位后，相互位置关系通常是用数来表示的。例如，由于航海的需要而产生的地理坐标（经纬度）。又如，为了掌握天体运行的规律或标明天体的位置而产生的各种天文坐标。在日常生活中我们也常常按这样的方法来确定某个地点的位置。这就是数学上引入各种坐标的实际背景。

直角坐标系是最自然、最常用的一种坐标系，但它并不是用数来刻画点的位置的唯一方法，用哪种方法最方便，要按具体情况而定。例如，描述射击目标可以用目标的方向角和距离这两个数，这就是点的极坐标形式。

本章主要讨论平面上的极坐标系，给出一些常见曲线的极坐标方程。通过具体问题，说明极坐标方法及其应用过程。还要介绍空间中的柱坐标系和球坐标系。

1.1 直角坐标系，平面上的伸缩变换

1.1.1 直角坐标系

(1) 直线上点的坐标

在直线上取定一点 O ，取定一个方向，再取一个长度单位。于是对于直线上任一点 P （设 P 点不同于 O 点），可以按下面的方法来标明它的位置：

先按长度单位量出线段 OP 的长度， $|OP| = x$ 。按照从 O 到 P 的方向与选定的方向相同或相反，分别以正数 $+x$ 或负数 $-x$ 来标明 P 点的位置。这个数就称为 P 点的坐标。而 O 点的坐标为 0 。反之，给定任一实数，直线上有唯一的点以这个数为坐标。于是就给出了直线上的点与全体实数之间的一一对应关系。点 O ，长度单位和选定的方向三者就构成了直线上的坐标系，简称数轴。

(2) 平面直角坐标系

在平面上取两条互相垂直并选定了方向的直线，一条称为 x 轴，一条称为 y 轴，交点 O 称为原点。取定长度单位，则平面上任一点 M 的位置可用下面的方法确定：

由点 M 向 x 轴和 y 轴分别作垂线，点 P 和点 Q 分别是它们的垂足，即 P 为点 M 在 x 轴上的投影点， Q 为点 M 在 y 轴上的投影点。设 x 为点 P 在 x 轴上的坐标， y 为点 Q 在 y 轴上的坐标，则点 M 的位置可以用有序数组 (x, y) 来表示。如此取定的两条互相垂直

的且有方向的直线和长度单位构成平面上一个直角坐标系，记为 xOy ，有序数组 (x, y) 为点 M 的坐标。

在平面上建立了直角坐标系后，平面上的点就与全体有顺序的实数对之间建立了一一对应关系。也就是说，在给定坐标系下，平面上的任一点唯一地确定一对有序实数。反之，任意给定一对有序实数，它也唯一地确定平面上的一个点。

平面直角坐标系按 x 轴和 y 轴的选取方向可以分成两大类：把 x 轴按逆时针方向绕原点 O 转 $\frac{\pi}{2}$ ，而与 y 轴重合时，如果它们的方向一致，则称这样的坐标系为右手系（如图 1-1 所示）。否则，称为左手系（如图 1-2 所示）。以后我们一般都用右手系。

(3) 空间直角坐标系

过空间中一个定点 O ，作三条互相垂直且有相同长度单位的数轴，就构成了空间直角坐标系。点 O 称为坐标原点，三条数轴分别称为 x 轴、 y 轴、 z 轴。取定了空间直角坐标系，就可以建立空间的点与三个有序实数之间的对应关系：设 M 为空间中的一个点，它在三条坐标轴上的投影点分别为 P, Q, R ，若三个点在数轴上的相应坐标分别为 x, y, z ，则有序数组 (x, y, z) 就称为点 M 的坐标。反之，任意给定一个有序数组 (x, y, z) ，在空间中有唯一的一个点以 (x, y, z) 为坐标。这样，在空间中的点和有序数组 (x, y, z) 之间建立了一一对应关系（如图 1-3 所示）。

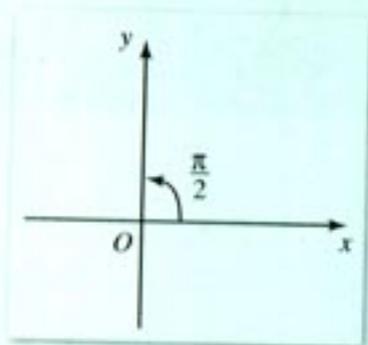


图 1-1

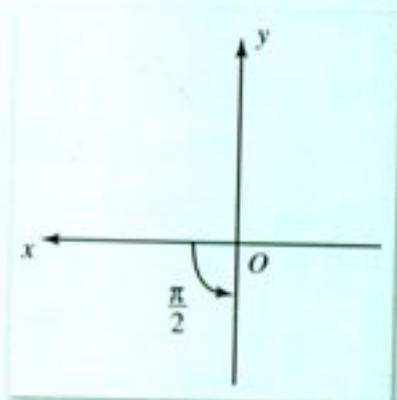


图 1-2

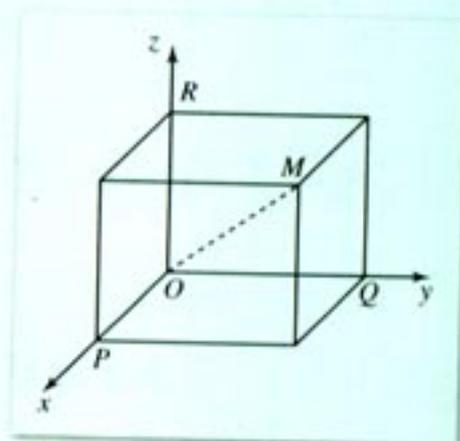


图 1-3



设立方体的一个顶点在原点，三条棱分别在三条坐标轴的正半轴上。已知棱长为 3，求八个顶点的坐标。

1.1.2 平面上的伸缩变换

在图 1-4 中，作出正弦函数 $y = \sin x$ 的图象。设点 $P(x, y)$ 为正弦曲线 $y = \sin x$ 上的任意一点，如果保持横坐标不变，把纵坐标变为原来的 3 倍，则点 $P(x, y)$ 变为平面上的新点 $Q(X, Y)$ ，其中坐标间的关系式为

$$\begin{cases} X=x \\ Y=3y \end{cases} \quad (1-1)$$

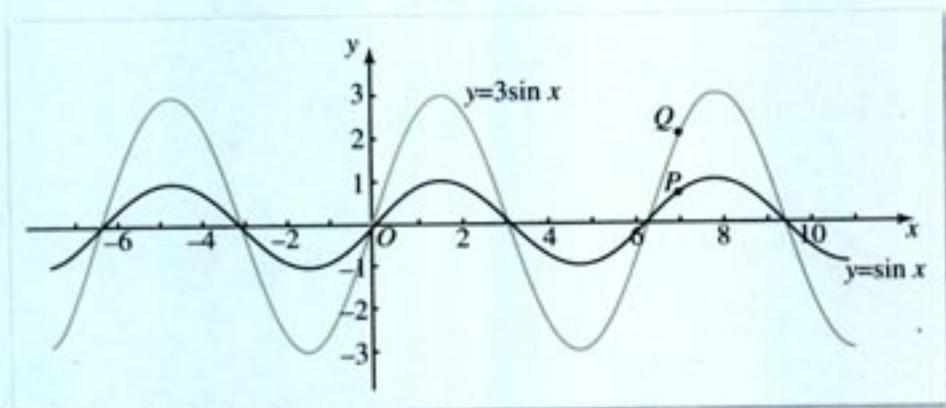


图 1-4

坐标变换公式(1-1)适用于正弦曲线 $y = \sin x$ 上的所有点, 因此原来的正弦曲线变为新的曲线

$$\frac{Y}{3} = \sin X,$$

即 $Y = 3 \sin X$.

此曲线把原来正弦曲线的“振幅”增大到它的 3 倍, 即振幅为 3. 坐标变换公式(1-1)表示平面上的一种伸缩变换.

如图 1-5 所示, 设 $P(x, y)$ 为正弦曲线 $y = \sin x$ 上的任意一点, 如果保持纵坐标不变, 把横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$, 则点 $P(x, y)$ 变为平面上新的点 $Q(X, Y)$, 坐标变换公式为

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}x \\ Y = y \end{cases}$$

它也表示平面上的一种伸缩变换. 它把原来的正弦曲线变为新的曲线

$$Y = \sin 2X.$$

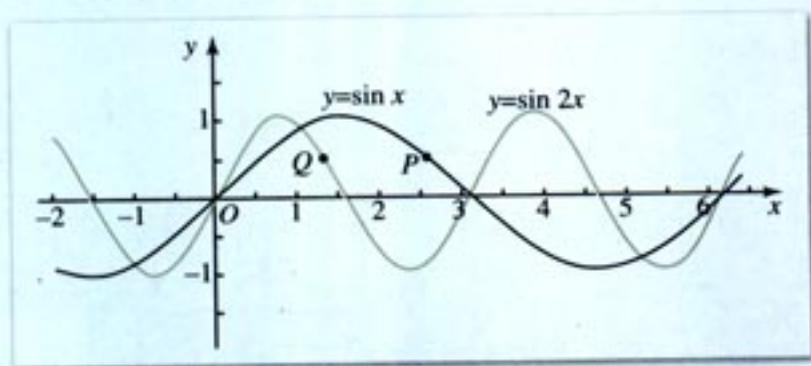


图 1-5

此曲线把原来正弦曲线的“周期”缩小为它的 $\frac{1}{2}$, 即周期为 π .

如图 1-6 所示, 设 $P(x, y)$ 为正弦曲线 $y = \sin x$ 上的任意一点, 按下面坐标变换公式

把点 $P(x, y)$ 变为平面上新的点 $Q(X, Y)$:

$$\begin{cases} X = \frac{1}{2}x \\ Y = 3y \end{cases}$$

平面上的这一坐标变换把正弦曲线 $y = \sin x$ 变为新的曲线

$$\frac{Y}{3} = \sin 2X,$$

即 $Y = 3\sin 2X$.

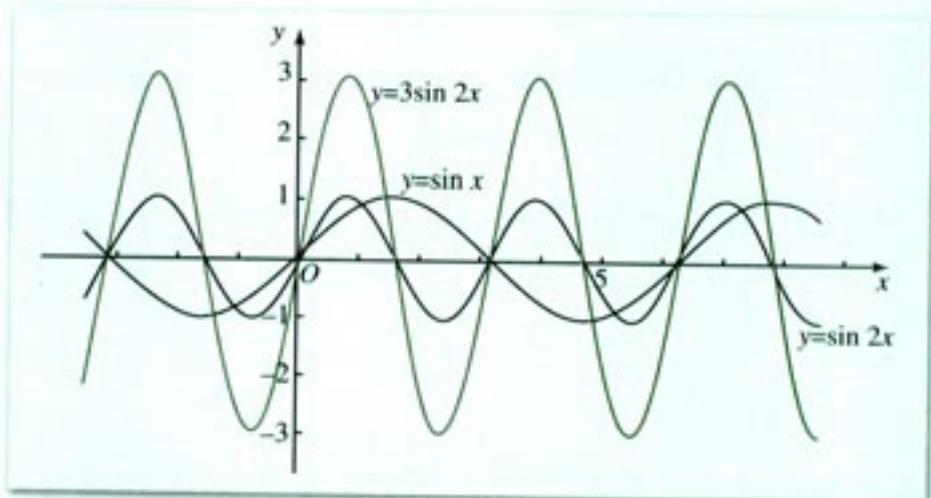


图 1-6

此曲线把正弦曲线 $y = \sin x$ 的振幅增大到 3, 同时周期变为 π .

此变换可看作上述两个变换的“复合”: 先保持 y 不变, 把横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$; 在此基础上, 再把纵坐标变为原来的 3 倍.

把上述坐标变换一般化, 有

$$\begin{cases} X = ax \\ Y = by \end{cases} \quad (1-2)$$

其中 $a > 0, b > 0$. 式(1-2)是平面上伸缩变换的坐标表达式.

平面上伸缩变换的一个典型实例是圆在平行压缩(或拉伸)下变为椭圆, 如图 1-7 所示.

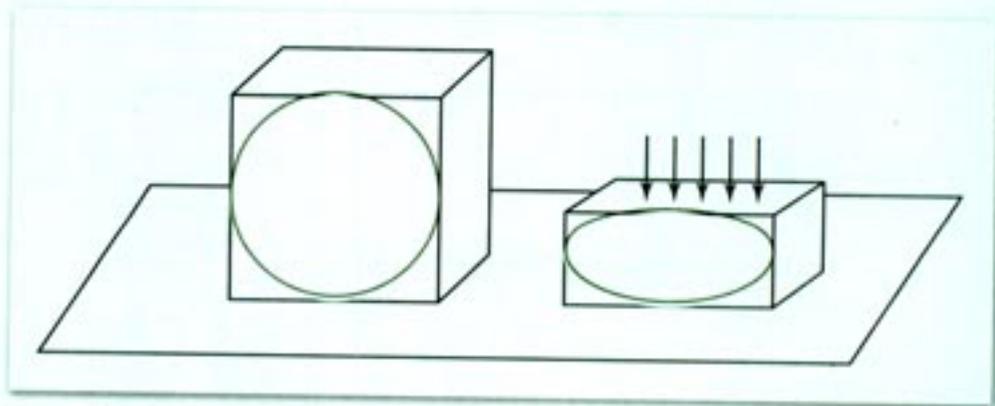


图 1-7

有一圆形的弹性物体, 圆的方程为

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

设物体受均匀的平行于 y 轴的外力 F 的压缩, 而保持 x 轴上的直径不动 (如图 1-8 所示). $P(x, y)$ 为圆上一点, 在压缩后变到点 $M(X, Y)$. 由于力 F 平行于 y 轴, 因此 $Y = ky$ ($0 < k < 1$), 而 $X = x$. 把 $x = X$, $y = \frac{Y}{k}$ 代入上面圆的方程, 得

$$X^2 + \frac{Y^2}{k^2} = a^2,$$

$$\text{即 } \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{(ak)^2} = 1.$$

这是椭圆的方程. 这表明, 圆被压缩后变为椭圆.

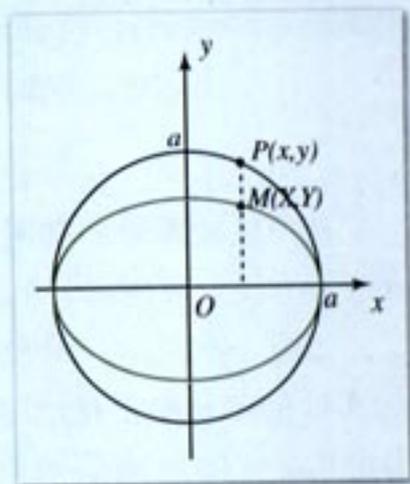


图 1-8

练习

1. 把圆 $x^2 + y^2 = 4$ 沿 x 轴方向均匀压缩为椭圆 $X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1$, 写出坐标变换公式.

2. 设平面上伸缩变换的坐标表达式为

$$\begin{cases} X = 3x \\ Y = 2y \end{cases}$$

求圆 $x^2 + y^2 = 4$ 在此伸缩变换下的方程.

习题 1-1

1. 证明: 以点 $A(4, 1, 9)$, $B(10, -1, 6)$, $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

2. 在 z 轴上求一点, 使它到点 $A(-4, 1, 7)$ 与到点 $B(3, 5, -2)$ 的距离相等.

3. 伸缩变换的坐标表达式为 $\begin{cases} X = x \\ Y = 4y \end{cases}$ 曲线 C 在此变换下变为椭圆 $X^2 + \frac{Y^2}{16} = 1$. 求曲线

C 的方程.

1.2 极坐标系

直角坐标系是最常用的坐标系，但它并不是用数来刻画点的位置的唯一方法。用哪种方法最方便，要对具体问题作具体分析。

如图 1-9 所示，缉私观测站位于点 O 处，看到位于点 A 处的走私船正在逃跑。现停泊于点 O 处的缉私船追击走私船，随时需要观测站提供走私船所在的位置 P 。对船舶来说，最方便的数据不是走私船所在点的直角坐标 (x, y) ，而是它的方位角，即夹角 θ 。在航空和航海中的情况都是这样。

当用炮兵指挥仪指示射击目标时，输出的是目标的方位，即方向和距离。在日常生活中，我们也经常用距离和角度指示位置。用距离和方向刻画点的位置，这是建立极坐标系的基本思路。

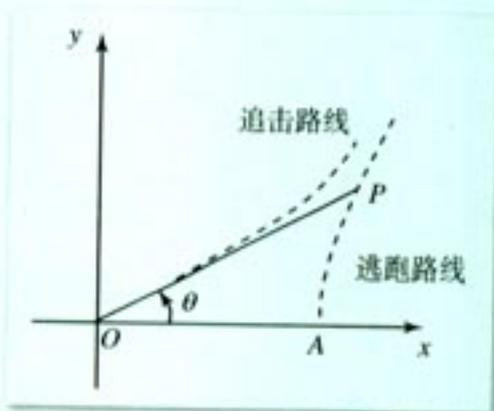


图 1-9

1.2.1 平面上点的极坐标

在平面上取一个定点 O ，由 O 点出发的一条射线 Ox ，一个长度单位及计算角度的正方向（通常取逆时针方向），合称为一个极坐标系。 O 点称为极点， Ox 称为极轴。平面上任一点 M 的位置可以由线段 OM 的长度 ρ 和从 Ox 到 OM 的角度 θ 来刻画（如图 1-10 所示）。这两个数组成的有序数对 (ρ, θ) 称为点 M 的极坐标。 ρ 称为极径， θ 称为极角。

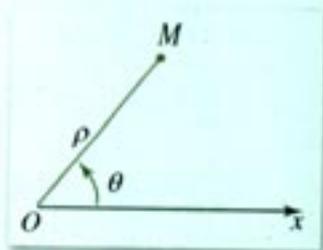


图 1-10

例 1 在同一个极坐标系中，画出以下点：

$$A\left(1, \frac{\pi}{4}\right), B\left(2, \frac{3}{2}\pi\right), C\left(3, -\frac{\pi}{4}\right), D\left(4, \frac{9}{4}\pi\right).$$

解：如图 1-11 所示。

例 2 设点 $A\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ ，直线 l 为过极点且垂直于极轴的直线，分别求点 A 关于极轴，直线 l ，极点的对称点的极坐标（限定 $\rho > 0$ ， $-\pi < \theta \leq \pi$ ）。

解：如图 1-12 所示。

关于极轴的对称点为 $B\left(2, -\frac{\pi}{3}\right)$ 。

关于直线 l 的对称点为 $C\left(2, \frac{2}{3}\pi\right)$ 。

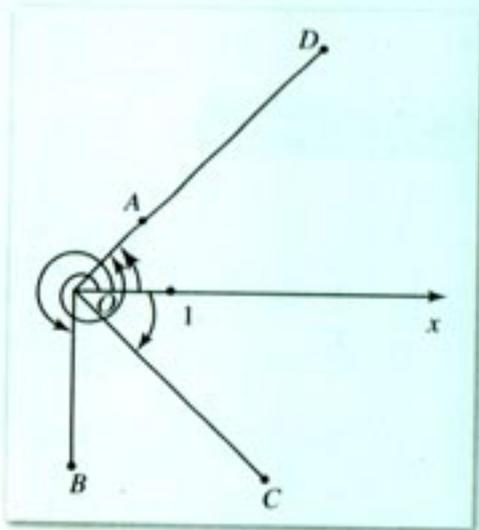


图 1-11

关于极点 O 的对称点为 $D\left(2, -\frac{2}{3}\pi\right)$.

四个点 A, B, C, D 都在以极点为圆心, 2 为半径的圆上.

由此例可得关于对称点的一般结论: 点 (ρ, θ) 关于极轴的对称点是 $(\rho, -\theta)$, 关于上述直线 l 的对称点是 $(\rho, \pi - \theta)$, 关于极点 O 的对称点是 $(\rho, \pi + \theta)$.

在极坐标 (ρ, θ) 中, 一般限定 $\rho \geq 0$. 当 $\rho = 0$ 时, 就与极点重合, 此时 θ 不确定. 给定点的极坐标 (ρ, θ) , 就唯一地确定了平面上的一个点. 但是, 平面上的一个点的极坐标并不是唯一的, 它有无穷多种表示形式. 事实上, (ρ, θ) 和 $(\rho, \theta + 2k\pi)$ 代表同一个点, 其中 k 为整数. 由此可见, 平面上的点与它的极坐标不是一一对应关系. 这是极坐标与直角坐标的不同之处. 如果限定 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$, 则除极点外, 平面上的点就与它的极坐标构成一一对应关系.

我们也可以允许 $\rho < 0$, 此时极坐标 (ρ, θ) 对应的点 M 的位置按下面规则确定: 点 M 在与极轴成 θ 角的射线的反向延长线上, 它到极点 O 的距离为 $|\rho|$, 即规定当 $\rho < 0$ 时, 点 $M(\rho, \theta)$ 就是点 $M(-\rho, \theta + \pi)$ (如图 1-13 所示).

应该指出, 在通常情况下总认为 $\rho \geq 0$, 只在事先说明的条件下, 才允许取 $\rho < 0$.

极坐标的应用范围极为广泛, 如在力学中对行星运动的研究和机械中凸轮的设计、波的传播、温度分布等问题.

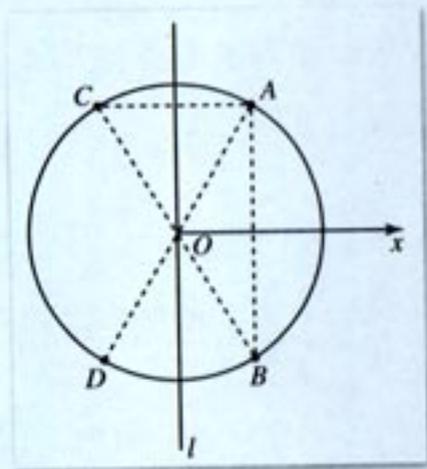


图 1-12

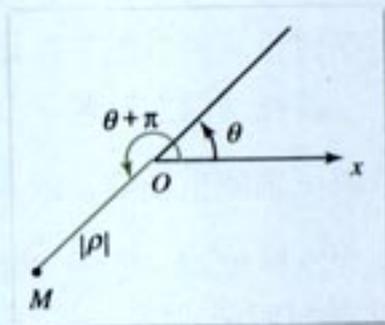


图 1-13

思考与讨论

在极坐标系中, ρ 恒为 1 的点的集合构成什么曲线? θ 恒为 $\frac{\pi}{4}$ 的点的集合构成什么图形?

练习

1. 在极坐标系中作出下列各点:

$$A\left(2, \frac{\pi}{6}\right), B\left(6, -\frac{\pi}{6}\right), C\left(1, \frac{2}{3}\pi\right), D\left(3, -\frac{3}{4}\pi\right), E(4, \pi), F(5, 0).$$

2. 在极坐标系中作出下列各点:

$$A\left(5, \frac{\pi}{3}\right), B\left(5, -\frac{\pi}{3}\right), C\left(5, \frac{4}{3}\pi\right), D\left(5, \frac{2}{3}\pi\right), E\left(-5, \frac{\pi}{3}\right), F\left(5, \frac{5}{3}\pi\right),$$

$$G\left(-5, -\frac{\pi}{3}\right).$$

3. 在第2题所画出的图上观察各点的相互位置关系, 并思考下面各点的相互位置关系:

$$A(\rho, \theta), B(\rho, -\theta), C(\rho, \theta+\pi), D(\rho, \pi-\theta), E(-\rho, \theta), F(-\rho, -\theta).$$

1.2.2 极坐标与直角坐标的关系

极坐标系和直角坐标系是平面上的两种不同的坐标系. 平面上的点可以表示为极坐标, 也可以表示为直角坐标, 以后在讨论问题时经常要作这两种坐标的变换.

设在平面上取定了一个极坐标系, 以极轴作为直角坐标系的 x 轴的正半轴, 以 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的射线作为 y 轴的正半轴, 以极点为坐标原点, 长度单位不变, 建立一个直角坐标系 (如图 1-14 所示).

设 M 为平面上的一点, 它的直角坐标为 (x, y) , 极坐标为 (ρ, θ) . 由图 1-14 可知下面的关系式成立:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad (1-3)$$

或

$$\begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \end{cases} \quad (1-4)$$

顺便指出, 上式对 $\rho < 0$ 也成立.

在本书中, 若不特别说明, 则极坐标和直角坐标的变换都指公式 (1-3), (1-4).

例 3 把点 M 的极坐标 $\left(2, \frac{2}{3}\pi\right)$ 化为直角坐标形式.

解: 用坐标变换公式 (1-3), 得

$$\begin{cases} x = 2 \cos \frac{2}{3}\pi = -1 \\ y = 2 \sin \frac{2}{3}\pi = \sqrt{3} \end{cases}$$

即点 M 的直角坐标为 $(-1, \sqrt{3})$.

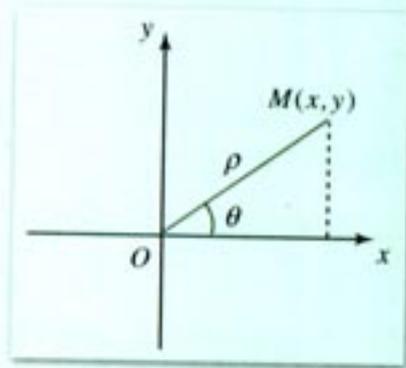


图 1-14

例 4 把点 M 的直角坐标 $(1, -1)$ 化为极坐标形式 (限定 $\rho \geq 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$).

解: 由坐标变换公式(1-4), 得

$$\rho = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\tan \theta = \frac{-1}{1} = -1, \quad \theta = -\frac{\pi}{4} \quad (\theta \text{ 为第四象限角}).$$

即点 M 的极坐标为 $(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$.

例 5 在直角坐标系中, 以点 (x_0, y_0) 为极点, 以 x 轴正向为极轴方向建立极坐标系, 如图 1-15 所示. 写出平面上点的直角坐标和极坐标的变换公式 (假定长度单位不变).

解: 由直角坐标的平移公式

$$\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$$

结合坐标变换公式(1-3)和(1-4), 可得

$$\begin{cases} x - x_0 = \rho \cos \theta \\ y - y_0 = \rho \sin \theta \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = x_0 + \rho \cos \theta \\ y = y_0 + \rho \sin \theta \end{cases} \quad (1-5)$$

类似得

$$\begin{cases} \rho^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \\ \tan \theta = \frac{y - y_0}{x - x_0} \end{cases}$$

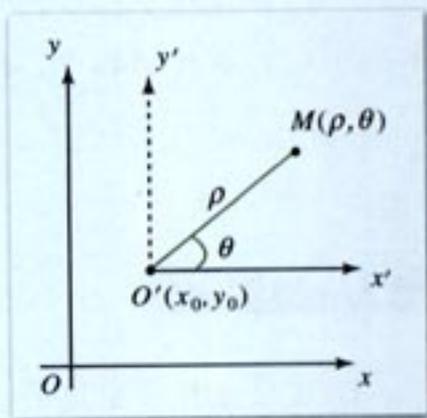


图 1-15

思考与讨论

利用直角坐标和极坐标的变换公式(1-3)和(1-4), 可以把曲线的直角坐标方程化为极坐标形式. 试把圆的普通方程 $x^2 + y^2 = 1$ 化为极坐标形式, 把直线 $y = x$ 化为极坐标形式.

结合 1.2.1 节的“思考与讨论”, 分析二者的异同点.



练习

1. 把点 M 的极坐标 $(5, \frac{5}{6}\pi)$ 化为直角坐标形式.
2. 把点 M 的直角坐标 $(\sqrt{3}, -1)$ 按下面的要求化为极坐标形式:
 - (1) 在极坐标中, 限定 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$;
 - (2) 在极坐标中, 限定 $\rho < 0, 0 \leq \theta < 2\pi$.

习题 1-2

1. 在极坐标系中作下列各点, 并说明每组中各点的位置关系:

$$(1) A(2, 0), B(2, \frac{\pi}{6}), C(2, \frac{\pi}{4}), D(2, \frac{\pi}{2}),$$

$$E(2, \frac{5}{4}\pi), F(2, \frac{3}{2}\pi), G(2, \frac{11}{6}\pi);$$

$$(2) A(0, \frac{\pi}{4}), B(1, \frac{\pi}{4}), C(-1, \frac{\pi}{4}), D(2, \frac{5}{4}\pi),$$

$$E(3, \frac{5}{4}\pi), F(-3, \frac{5}{4}\pi), G(-10, \frac{\pi}{4}).$$

2. 在极坐标系中作下列各点, 并说明每组中两点的位置关系:

$$(1) (1, \frac{\pi}{6}), (1, -\frac{\pi}{6});$$

$$(2) (2, \frac{\pi}{6}), (2, \frac{11}{6}\pi);$$

$$(3) (2, \frac{\pi}{3}), (2, \frac{2}{3}\pi);$$

$$(4) (4, \frac{\pi}{3}), (-4, -\frac{\pi}{3});$$

$$(5) (3, \frac{\pi}{4}), (3, \frac{5}{4}\pi);$$

$$(6) (5, \frac{\pi}{4}), (-5, \frac{\pi}{4}).$$

3. 把下列各点的直角坐标化为极坐标 (限定 $\rho > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$):

$$A(-1, 1), B(0, -2), C(3, 4), D(-3, -4).$$

4. 把下列各点的极坐标化为直角坐标:

$$A(2, -\frac{\pi}{6}), B(2, \frac{3}{2}\pi), C(2, \frac{5}{4}\pi), D(-2, \frac{\pi}{6}).$$

1.3 曲线的极坐标方程

在数学 2 中我们学习过直线和圆的方程, 在选修系列 1 或系列 2 中学习了圆锥曲线与

方程. 现在可以回顾这些曲线与方程, 给出曲线的直角坐标方程的定义.

在给定的平面直角坐标系下, 如果二元方程

$$F(x, y) = 0$$

满足下面两个条件, 则称它为曲线 C 的方程:

- (1) 曲线 C 上任一点的坐标 (x, y) 都满足方程;
- (2) 所有适合方程的 (x, y) 所对应的点都在曲线 C 上.

实际上, 曲线 C 是坐标 (x, y) 满足方程 $F(x, y) = 0$ 的所有点的集合. 以后我们把直角坐标方程常称为曲线的普通方程.

建立了直角坐标系后, 一个有序数对表示平面上的一个点, 而一个二元方程表示一条平面曲线. 这样就使数与形结合起来, 使我们可以通过对数量关系的讨论来研究图形; 另一方面也可以利用几何图形直观地演示函数方程中两变量之间的关系, 有时还能从几何图形中提示解决问题的途径.

和上述曲线的普通方程类似, 给出曲线的极坐标方程的概念.

在给定的平面上的极坐标系下, 有一个二元方程

$$F(\rho, \theta) = 0.$$

如果曲线 C 是由极坐标 (ρ, θ) 满足方程的所有点组成的, 则称此二元方程 $F(\rho, \theta) = 0$ 为曲线 C 的极坐标方程.

此处要注意, 由于平面上点的极坐标的表示形式不唯一, 因此曲线的极坐标方程与直角坐标方程也有不同之处. 一条曲线上点的极坐标有多组表示形式, 这里要求至少有一组能满足极坐标方程. 有些表示形式可能不满足方程. 例如, 对极坐标方程 $\rho = \theta$, 点 $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 可以表示为 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$ 或 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} - 2\pi\right)$ 等多种形式, 其中只有 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ 的形式满足方程, 而其他表示形式都不满足方程.

今后我们遇到的极坐标方程多是 $\rho = \rho(\theta)$ 的形式, 即 ρ 为 θ 的一个函数.

由极坐标系中点的对称性可得到极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$ 的图形对称性: 若 $\rho(\theta) = \rho(-\theta)$, 则图形关于极轴对称; 若 $\rho(\theta) = \rho(\pi - \theta)$, 则图形关于射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所在的直线对称; 若 $\rho(\theta) = \rho(\pi + \theta)$, 则图形关于极点 O 对称.

例 1 极坐标方程 $\rho = 1$ 表示什么曲线?

解: 方程 $\rho = 1$ 中不含变量 θ . 这表明不论 θ 取何值, 极径 ρ 恒为 1, 因此这是以极点为圆心, 以 1 为半径的圆.

显然, 坐标 $(1, \theta)$ 满足方程, 以 $(1, \theta)$ 为坐标的点在此圆上. 而在此圆上的点的坐标也满足方程 $\rho = 1$.

解此题时, 也可以把极坐标变换为直角坐标. 由 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, 知方程 $\rho = 1$ 可以化为普通方程 $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$. 这是圆心在原点的单位圆.

圆心在极点, 半径为 R 的圆的极坐标方程为 $\rho = R$. 由此可见, 这种圆的极坐标方程比直角坐标方程简单得多.

例2 极坐标方程 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 表示什么曲线?

解: 方程中不含变量 ρ , 即不论 ρ 取何值, 极角 θ 恒为 $\frac{\pi}{4}$. 因此方程 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 代表一条射线, 它的极角为 $\frac{\pi}{4}$.

显然, 坐标 $(\rho, \frac{\pi}{4})$ 满足方程 $\theta = \frac{\pi}{4}$, 相应的点在此射线上. 而在此射线上的点的极坐标也满足方程 $\theta = \frac{\pi}{4}$.

给定极坐标方程 $F(\rho, \theta) = 0$, 可以用描点法作它的图象, 这和作普通方程的图象类似. 给定了曲线, 求它的极坐标方程, 就是在极坐标系下把此曲线的几何性质用代数式写出来.

例3 在极坐标系中, 作出方程 $\rho = 2\cos\theta$ 的图形 $(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$.

解: 描点作图. 适当选取 θ 的某些值, 按方程计算相应的 ρ 值, 列表如下:

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0

作出相应各点, 光滑地连成曲线 (如图 1-16 所示). 这是以 OD 为直径的圆, D 点的极坐标为 $(2, 0)$. 圆的极坐标方程在下一节详细讨论.

作此图形时, 也可利用对称性. 因为 ρ 是 θ 的偶函数, 所以图形关于极轴对称. 先作与 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 对应的方程的图形, 再用关于极轴的对称性作出下半部分的图形 (与 $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq 0$ 对应).

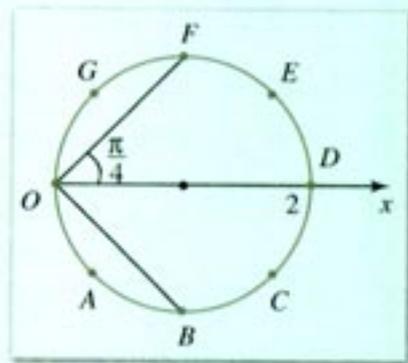


图 1-16

例4 设极点 O 到直线 l 的距离为 d . 由点 O 向直线 l 作垂线, 由极轴到垂线 OA 的角度为 α (如图 1-17 所示). 求直线 l 的极坐标方程.

解: 在直线 l 上任取一点 $M(\rho, \theta)$. 在直角三角形 OMA 中, 用三角知识得

$$\rho \cos(\alpha - \theta) = d, \quad (1-6)$$

即

$$\rho = \frac{d}{\cos(\alpha - \theta)}.$$

这就是直线 l 的极坐标方程.

由此可见, 直线的极坐标方程形式比普通方程复杂, 因此只在特殊情况下才用直线的

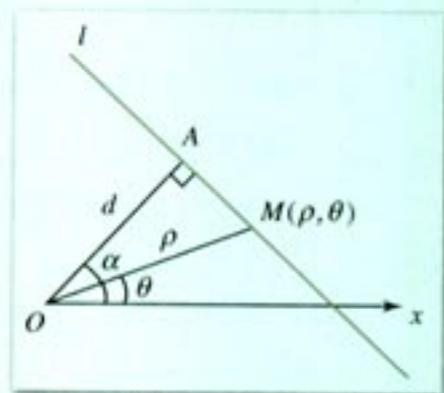


图 1-17

极坐标方程.

在此例中, 当 $\alpha=0$ 时, 直线 l 与极轴垂直, 此时方程变为 $\rho \cos \theta = d$; 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 直线 l 与极轴平行, 此时方程变为 $\rho \sin \theta = d$, 见图 1-18 的(1)和(2).

若 $d=0$, 则直线过极点. 设此时直线与极轴的夹角为 θ_0 , 则直线的方程为

$$\theta = \theta_0 \text{ 和 } \theta = \pi + \theta_0,$$

见图 1-18 的(3). 若允许 ρ 取负值, 则方程为

$$\theta = \theta_0.$$

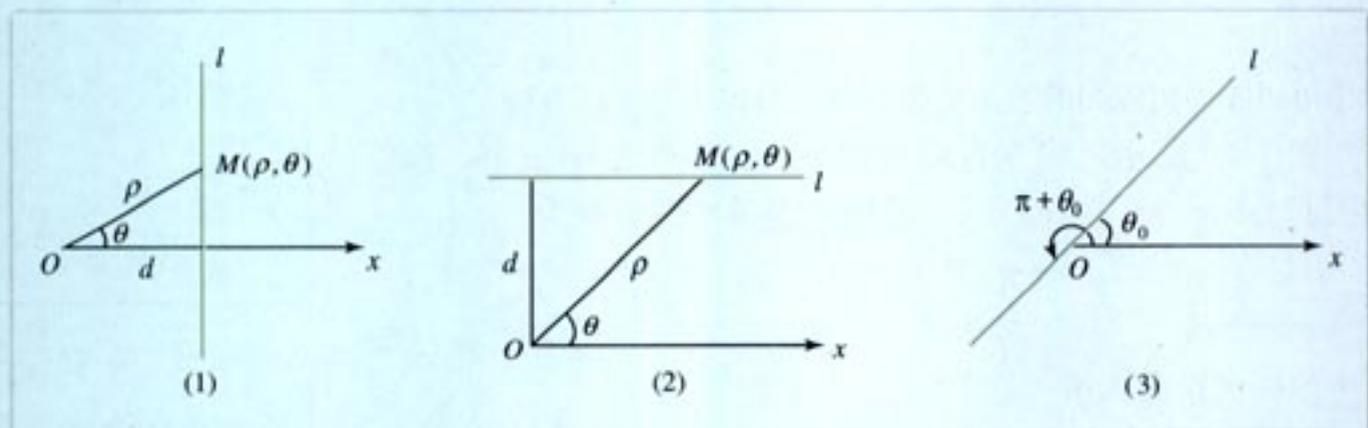


图 1-18

习题 1-3

1. 设直线过极坐标系中的点 $M(2, 0)$, 且垂直于极轴, 试直接建立该直线的极坐标方程.
2. 设直线过极坐标系中的点 $M\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$, 且平行于极轴, 试直接建立该直线的极坐标方程.
3. 设曲线的普通方程为 $x^2 + y^2 = R^2$, 试用坐标变换公式把此方程化为极坐标方程.
4. 设曲线的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$, 试用坐标变换公式把此方程化为直角坐标方程.
5. 设曲线的极坐标方程为 $\rho = 2a \sin \theta$ ($a > 0$), 试用坐标变换公式把此方程化为直角坐标方程.

1.4 圆的极坐标方程

在直角坐标系和极坐标系中, 表示圆的方程形式是不同的. 在有些情况下, 用极坐标方程表示更简单, 如上节描述的圆心在极点的圆, 还有本节要讨论的过极点的圆.

1.4.1 圆心在极轴上且过极点的圆

圆心在极轴上的点 $(a, 0)$ 处, 且圆过极点 O (如图1-19所示). P 为圆与极轴的另一交点, $M(\rho, \theta)$ 为圆上的动点, 连接 OM 和 MP , 由平面几何知识知 $OM \perp MP$. 在直角三角形 OMP 中, 由三角知识可得

$$\rho = 2a \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (1-7)$$

坐标 (ρ, θ) 满足此方程的点也在该圆上. 因此, 得该圆的方程 $\rho = 2a \cos \theta$.

也可以先写出该圆的直角坐标方程, 再化为极坐标方程.

如图1-20所示, 建立直角坐标系. 在直角坐标系中, 该圆的圆心为 $(a, 0)$, 半径为 a , 故圆的直角坐标方程为

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2,$$

即 $x^2 + y^2 = 2ax$.

由坐标变换公式得

$$\rho^2 = 2a\rho \cos \theta,$$

即 $\rho = 2a \cos \theta$.

这样就得到前面推导出的极坐标方程.

上节曾用描点法作过此方程的图形, 这是以后常用的圆的方程.

例1 写出圆心在点 $(3, 0)$, 且过极点的圆的极坐标方程, 并把它化为直角坐标方程.

解: 由式(1-7)可得该圆的方程为

$$\rho = 6 \cos \theta, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

变形为

$$\rho^2 = 6\rho \cos \theta.$$

用坐标变换公式得

$$x^2 + y^2 = 6x,$$

即 $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

这是该圆的普通方程.

例2 从极点作圆 $\rho = 2a \cos \theta$ 的弦, 求各条弦中点的轨迹方程.

解: 记所求曲线上动点 M 的极坐标为 (r, φ) , 由图1-21可知

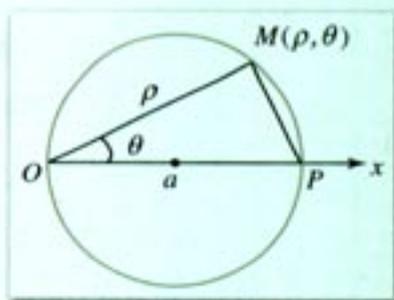


图 1-19

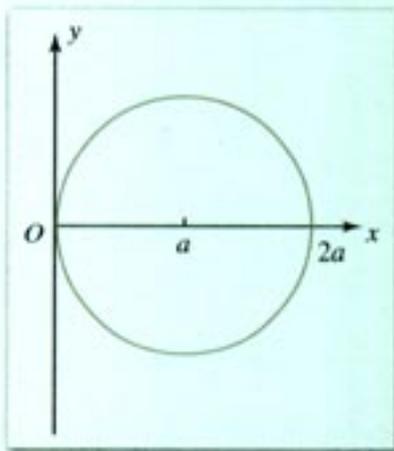


图 1-20

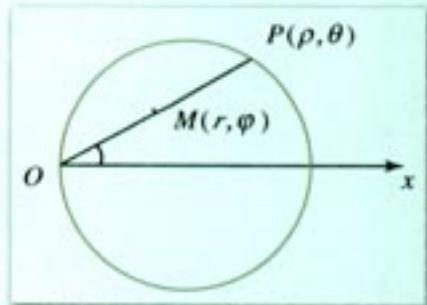


图 1-21

$$\begin{cases} \varphi = \theta \\ r = \frac{1}{2}\rho \end{cases}$$

把 $\theta = \varphi$ 和 $\rho = 2r$ 代入方程 $\rho = 2a \cos \theta$, 得

$$2r = 2a \cos \varphi,$$

即

$$r = a \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

这就是所求的轨迹方程. 由此极坐标方程可知, 所求轨迹是一个以 $(\frac{a}{2}, 0)$ 为圆心, 半径为 $\frac{a}{2}$ 的圆.



练习

1. 把圆的普通方程 $x^2 + y^2 = x$ 化为极坐标方程, 并说明圆心和半径.
2. 把圆的极坐标方程 $\rho = 8 \cos \theta$ 化为直角坐标方程, 并说明圆心和半径.

1.4.2 圆心在点 $(a, \frac{\pi}{2})$ 处且过极点的圆

如图 1-22 所示, 圆与射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 的交点为 $P(2a, \frac{\pi}{2})$. 在圆上任取一点 $M(\rho, \theta)$, 连接 OM 和 MP , 则 $OM \perp MP$. 在直角三角形 OMP 中, 由三角知识可得

$$\rho = 2a \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2a \sin \theta.$$

上式对 $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ 也成立 (请同学们作图后再说明). 易知, 只要坐标 (ρ, θ) 满足上面的方程, 相应的点一定在该圆上, 因此得该圆的方程

$$\rho = 2a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (1-8)$$

该圆的极坐标方程也可以由它的直角坐标方程

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2$$

变换得出.

例 3 写出圆心在点 $(2, \frac{\pi}{2})$ 处且过极点的圆的极坐标方程, 并把它化为直角坐标方程.

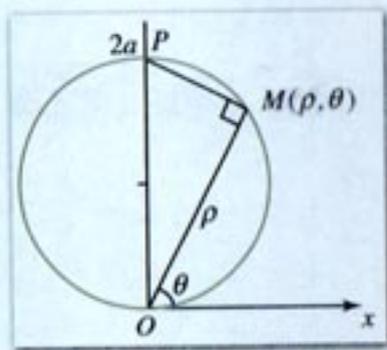


图 1-22

解: 按圆的方程(1-8), 直接得极坐标方程

$$\rho = 4\sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi,$$

变形为 $\rho^2 = 4\rho\sin \theta$.

用坐标变换公式得

$$x^2 + y^2 = 4y,$$

即 $x^2 + (y-2)^2 = 4$.

例 4 写出圆心在点 $(-1, 1)$ 处, 且过原点的圆的直角坐标方程, 并把它化为极坐标方程.

解: 如图 1-23 所示, 圆的半径为

$$R = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

圆的方程为

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2,$$

变形为

$$x^2 + y^2 = -2(x-y).$$

用坐标变换公式得

$$\rho^2 = -2(\rho\cos \theta - \rho\sin \theta),$$

即 $\rho = 2(\sin \theta - \cos \theta)$.

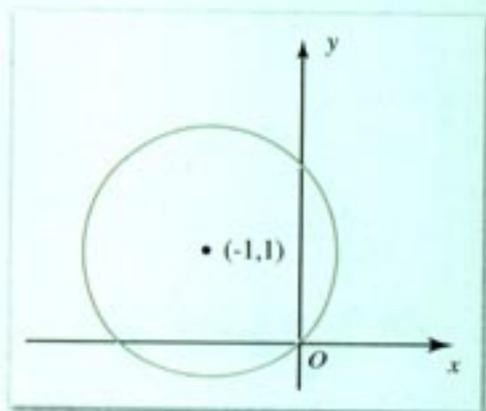


图 1-23

这里要指出, 当圆心不在直角坐标系的坐标轴上时, 要建立圆的极坐标方程, 通常把极点放置在圆心处, 极轴与 x 轴同向. 这样, 圆的极坐标方程十分简单, 为 $\rho = R$. 而极坐标与直角坐标的变换公式用 (1-5).



练习

1. 把圆的普通方程 $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ 化为极坐标方程.
2. 把圆的极坐标方程 $\rho = \sin \theta$ 化为直角坐标方程, 并说明圆心和半径.
3. 求两个圆 $\rho = 9\cos \theta$ 和 $\rho = 16\sin \theta$ 圆心之间的距离.

习题 1-4

1. 说明下列极坐标方程所表示的曲线:
 - (1) $\rho = \cos \theta$;
 - (2) $\rho = 4\cos \theta$;
 - (3) $\rho = \sin \theta$;
 - (4) $\rho = 9\sin \theta$.
2. 用圆的极坐标方程的形式直接写出下列过极点的圆的方程, 它们的圆心的坐标分别为:

- (1) 极坐标(2, 0); (2) 极坐标 $(2, \frac{\pi}{2})$;
 (3) 直角坐标(3, 0); (4) 直角坐标(0, 3).
 3. 把下列曲线的直角坐标方程化为极坐标方程:
 (1) $x^2 + (y-2)^2 = 4$; (2) $(x-3)^2 + y^2 = 9$;
 (3) $x^2 + y^2 = 4ax$; (4) $x^2 + y^2 = 4ay$.
 4. 把下列曲线的极坐标方程化为直角坐标方程:
 (1) $\rho = 2a \cos \theta$; (2) $\rho = 4a \sin \theta$;
 (3) $\rho = 9(\cos \theta + \sin \theta)$; (4) $\rho = \cos \theta - 4 \sin \theta$.
 5. 从极点作圆 $\rho = 4 \sin \theta$ 的弦, 求各条弦中点的轨迹方程.



探索与研究

圆锥曲线的极坐标方程

行星的运动或人造卫星的运动都围绕一个引力中心(太阳或地球). 为了描述、研究这类运动, 自然会选用极坐标系. 以引力中心为极点、运行平面上的某一固定方向为极轴的方向, 这类运动的轨迹是椭圆、抛物线或双曲线, 即圆锥曲线. 下面根据圆锥曲线的共同几何特征导出它的极坐标方程.

三种圆锥曲线的共同几何特征是: 圆锥曲线是到某定点(焦点)和某定直线(准线)的距离之比等于常数(离心率)的点的轨迹. 记焦点为 O , 准线为 l , 离心率为 e .

如图 1-24 所示, 以焦点 O 为极点, Ox 为极轴建立极坐标系, Ox 与准线 l 垂直, 极轴所在的直线与 l 交于 D 点. 设曲线方程为 $\rho = \rho(\theta)$, 在曲线上任取一点 $M(\rho, \theta)$, 过点 M 作准线 l 的垂线 MN , 过极点 O 作 MN 的垂线 OE , 交曲线于 A 点, 作 $AB \parallel MN$, 记 $|OA| = p$. 当离心率 e 和 p 给定后, 圆锥曲线就完全确定了.

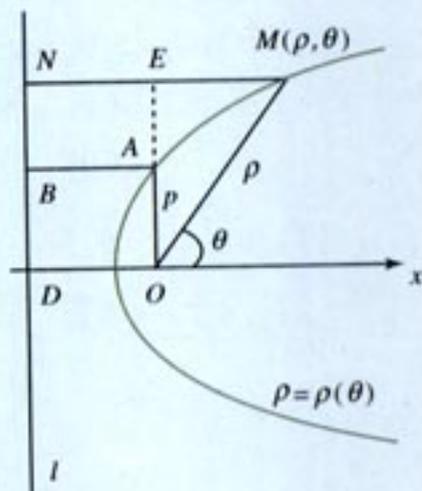


图 1-24

根据圆锥曲线的几何特征, 得到下面的表达式

$$\frac{|OA|}{|BA|} = e, \quad \frac{|OM|}{|NM|} = e.$$

其中 $|OM| = \rho$, $|OA| = p$, $\angle MOx = \theta$, 因此得 $|OD| = |BA| = \frac{p}{e}$, 它表示焦点到相应准线的距离. 又

$$\begin{aligned} |NM| &= |BA| + |EM| \\ &= \frac{p}{e} + \rho \cos \theta, \end{aligned}$$

从而得

$$\frac{\rho}{\frac{p}{e} + \rho \cos \theta} = e,$$

化简得圆锥曲线的极坐标方程

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \theta}. \quad (1-9)$$

方程中的参数 e 确定了曲线的三个类型： $e < 1$ 时为椭圆， $e = 1$ 时为抛物线， $e > 1$ 时为双曲线。参数 p 确定了各类曲线的形状。对抛物线来说， p 就是标准方程 $y^2 = 2px$ 中的 p ，表示焦点到准线的距离。对椭圆和双曲线来说，可用半轴 a 和 b 表示 p 。我们知道焦点到准线的距离为 $\left| \frac{a}{e} - c \right|$ 。因此 $\frac{p}{e} = \left| \frac{a}{e} - c \right|$ ，从而

$$p = |a - ce| = \left| a - c \cdot \frac{c}{a} \right| = \frac{|a^2 - c^2|}{a},$$

得

$$p = \frac{b^2}{a}. \quad (1-10)$$

在力学中研究天体运行时，从万有引力定律出发，得到的人造卫星或宇宙飞船轨道的方程正是上面的极坐标方程的形式，因而知道它们是圆锥曲线。其中 e 和 p 的大小取决于火箭发射速度的大小和方向。

例1 “神舟五号”载人飞船的运行轨道是以地心为焦点的椭圆，近地点高度为 200 km，远地点高度为 350 km，求轨道参数 e 和 p 。（地球半径 $R = 6\,378$ km）

解：如图 1-25 所示，近地点为 A ，远地点为 B 。

$$|OA| = 6\,378 + 200 = 6\,578,$$

$$|OB| = 6\,378 + 350 = 6\,728.$$

由方程(1-9)知， ρ 的最小值为 $\frac{p}{1+e}$ ，最大值为 $\frac{p}{1-e}$ 。由此得

$$\begin{cases} \frac{p}{1+e} = 6\,578 \\ \frac{p}{1-e} = 6\,728 \end{cases}$$

解得

$$e = 0.011\,3, \quad p = 6\,652(\text{km}).$$

例2 以椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 的左焦点为极点， x 轴正向为极轴方向，用公式(1-9)直接写出此椭圆的极坐标方程。

解：由 $a = 5$ ， $b = 4$ ，得 $c = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ 。因此离心率为

$$e = \frac{3}{5}.$$

由式(1-10)，知

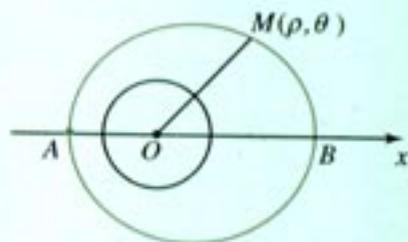


图 1-25

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{4^2}{5} = \frac{16}{5}.$$

从而得椭圆的极坐标方程

$$\rho = \frac{\frac{16}{5}}{1 - \frac{3}{5}\cos\theta},$$

即

$$\rho = \frac{16}{5 - 3\cos\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

例3 记抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 过点 F 作倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 的直线, 交抛物线于 A, B 两点, 求线段 AB 的长度.

解: 对此抛物线, 方程(1-9)中的 $e=1, p=4$, 因此它的极坐标方程为

$$\rho = \frac{4}{1 - \cos\theta}.$$

由图 1-26 知, 点 B 的极角为 $\frac{\pi}{4}$, 得

$$|FB| = \rho = \frac{4}{1 - \cos\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4(2 + \sqrt{2}),$$

点 A 的极角为 $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$, 得

$$|FA| = \rho = \frac{4}{1 - \cos\frac{5}{4}\pi} = \frac{4}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4(2 - \sqrt{2}),$$

由此得

$$|AB| = |FA| + |FB| = 16.$$

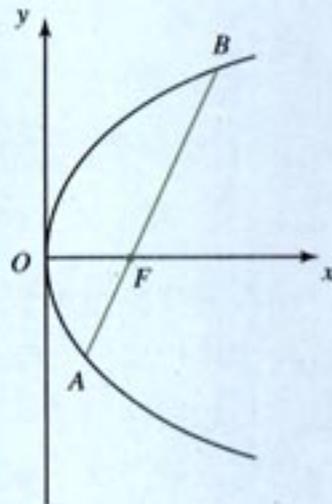


图 1-26

练习

1. 用式(1-9)判别下列圆锥曲线的极坐标方程表示哪类曲线, 并画出简图.

(1) $\rho = \frac{4}{1 - 2\cos\theta}$; (2) $\rho = \frac{4}{2 - \cos\theta}$; (3) $\rho = \frac{3}{1 - \cos\theta}$.

2. 设椭圆的极坐标方程为 $\rho = \frac{16}{5 - 3\cos\theta}$, 求它的长轴和短轴的长度.

3. 过抛物线 $y^2 = 3x$ 的焦点 F , 作倾斜角为 $\frac{\pi}{3}$ 的直线, 交抛物线于 A, B 两点, 求线段 AB 的长度.

4. 一颗彗星的轨道是抛物线, 太阳位于这条抛物线的焦点上. 已知这颗彗星距太阳 1.6×10^8 km 时, 极径和轨道的轴所成的角等于 $\frac{\pi}{3}$. 求这颗彗星轨道的极坐标方程, 并求它的近日点到太阳的距离.
5. 过抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 作倾斜角为 θ 的直线, 交抛物线于点 A 和 B , 求 $\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|}$.
6. 过椭圆 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 的左焦点 F 作直线, 交椭圆于点 A 和 B , 证明: $\frac{1}{|FA|} + \frac{1}{|FB|}$ 为定值.

1.5 柱坐标系和球坐标系

在天气预报中常有热带风暴的预告, 比如说某热带风暴位于北纬 15 度, 东经 125 度. 这些描述位置的数字也是在空间中刻画点的位置的一种坐标, 它不同于已学过的直角坐标. 又如描述卫星、飞船的位置或其他天体的位置, 往往也不用直角坐标. 由于不同的实际需要, 就产生了描述空间点的位置的不同参照系, 即不同的坐标系. 本节讨论两种坐标系: 柱坐标系和球坐标系.

先回顾平面上的两种坐标系. 在平面直角坐标系中, 描述点的位置的参照系是两根互相垂直的数轴, 点的坐标是由两个有序数构成的数组, 描述的是它相对于数轴的位置. 在极坐标系中, 参照系是一个极点和一条极轴, 点的坐标也是由两个有序数构成的数组, 描述的是它到极点的距离和相对于极轴的角度. 按照实际需要, 可以方便地选取其中一种坐标, 而且在分析问题时可以把坐标互相变换.

在空间直角坐标系中, 描述空间中一点的位置, 选取的参照系是三个互相垂直的平面, 点的坐标是由三个有序数构成的数组, 描述的是它相对于三个坐标面的位置. 当然, 空间点的直角坐标也可以看作是点相对于三根坐标轴的位置.

本节介绍的描述空间点的两种坐标, 也是由三个有序数构成的数组, 只是选取的参照系不同.

1.5.1 柱坐标系

设空间中一点 M 的直角坐标为 (x, y, z) , M 点在 xOy 坐标面上的投影点为 M_0 , M_0 点在 xOy 平面上的极坐标为 (ρ, θ) , 如图 1-27 所示, 则三个有序数 ρ, θ, z 构成的数组 (ρ, θ, z) 称为空间中点 M 的柱坐标. 在柱坐标中, 限定 $\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, z$ 为任意实数. 由此可见, 柱坐标就是平面上的极坐标, 加上与平面垂直的一个直角坐标. 因此, 由平面上极坐标和直角坐标的变换公式, 容易得到空间直角坐标与柱坐标的变换公式

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (1-11)$$

在平面极坐标中, 方程 $\rho = \rho_0$ (ρ_0 为不等于 0 的常数) 表示圆心在极点, 半径为 ρ_0 的圆, 方程 $\theta = \theta_0$ (θ_0 为常数) 表示与极轴成 θ_0 角的射线. 而在空间的柱坐标系中, 方程 $\rho = \rho_0$ 表示中心轴为 z 轴, 底半径为 ρ_0 的圆柱面, 它是上述圆周沿 z 轴方向平行移动而成的. 方程 $\theta = \theta_0$ 表示与 zOx 坐标面成 θ_0 角的半平面. 方程 $z = z_0$ 表示平行于 xOy 坐标面的平面 (如图 1-28 所示). 常把上述的圆柱面、半平面和平面称为柱坐标系的三族坐标面.

例 1 设点 M 的直角坐标为 $(1, 1, 3)$, 求它的柱坐标.

解: 用变换公式(1-11), 得

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

$$\rho = \sqrt{2}.$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad (\text{点 } M \text{ 在第 I 卦限}).$$

因此点 M 的柱坐标为 $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}, 3)$.

[图形演示] (见课件) 柱坐标系.

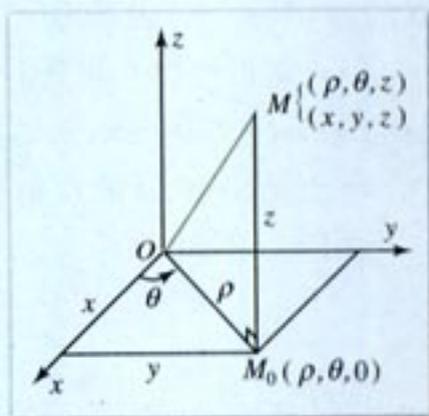


图 1-27

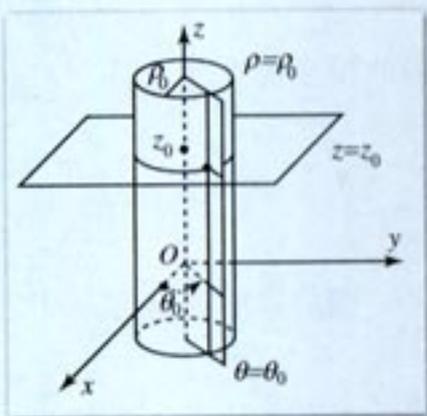


图 1-28

练习

1. 设点 M 的直角坐标为 $(1, -\sqrt{3}, 4)$, 求它的柱坐标.
2. 设点 M 的柱坐标为 $(2, \frac{\pi}{6}, 7)$, 求它的直角坐标.

1.5.2 球坐标系

设空间中一点 M 的直角坐标为 (x, y, z) , 点 M 在 xOy 坐标面上的投影点为 M_0 , 连接 OM 和 OM_0 .

如图 1-29 所示, 设 z 轴的正向与向量 \overrightarrow{OM} 的夹角为 φ , x 轴的正向与 $\overrightarrow{OM_0}$ 的夹角为 θ , M 点到原点 O 的距离为 r , 则由三个数 r, θ, φ 构成的有序数组 (r, θ, φ) 称为空间中点

M 的球坐标. 若设投影点 M_0 在 xOy 平面上的极坐标为 (ρ, θ) , 则极坐标 θ 就是上述的第二个球坐标 θ . 在球坐标中限定 $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi$.

下面给出点 M 的直角坐标与球坐标的变换公式.

由图 1-29 可知

$$z = r \cos \varphi,$$

$$\rho = r \sin \varphi,$$

而

$$x = \rho \cos \theta = r \sin \varphi \cos \theta,$$

$$y = \rho \sin \theta = r \sin \varphi \sin \theta,$$

由此得坐标变换公式

$$\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases} \quad (1-12)$$

在空间的球坐标系中, 方程

$$r = r_0 \quad (r_0 \text{ 为正常数})$$

表示球心在原点, 半径为 r_0 的球面; 方程

$$\theta = \theta_0 \quad (0 \leq \theta_0 < 2\pi)$$

表示过 z 轴的半平面, 它与 zOx 坐标面的夹角为 θ_0 ; 方程

$$\varphi = \varphi_0 \quad (0 \leq \varphi_0 \leq \pi)$$

表示顶点在原点, 半顶角为 φ_0 的圆锥面, 它的中心轴是 z 轴,

$\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ 时它在上半空间, $\varphi_0 > \frac{\pi}{2}$ 时它在下半空间, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ 时它是 xOy 平面, 如图 1-30 所示.

例 2 设点 M 的直角坐标为 $(1, 1, \sqrt{2})$, 求它的球坐标.

解: 由坐标变换公式(1-12), 可得

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2.$$

由

$$r \cos \varphi = z = \sqrt{2},$$

$$\text{得 } \cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}. \text{ 又}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = 1, \theta = \frac{\pi}{4} \quad (M \text{ 在第 I 卦限}).$$

从而知 M 点的球坐标为 $(2, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

地球的纬度、经度和球坐标的 φ, θ 类似, 只是计算起点略有不同.

以地球中心为坐标原点, 地球赤道所在的平面为 xOy 坐标面, 由原点指向北极点的连线方向为 z 轴正向, 本初子午线所在的平面为 zOx 坐标面. 本初子午线是由地球的两

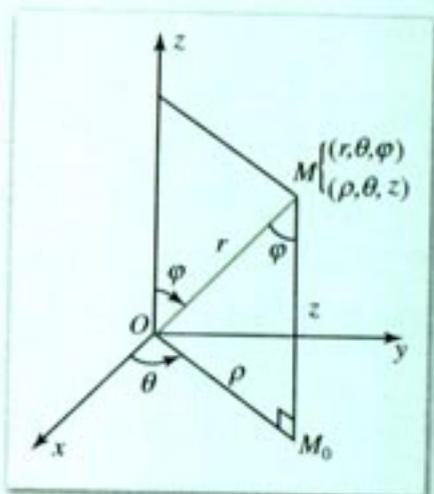


图 1-29

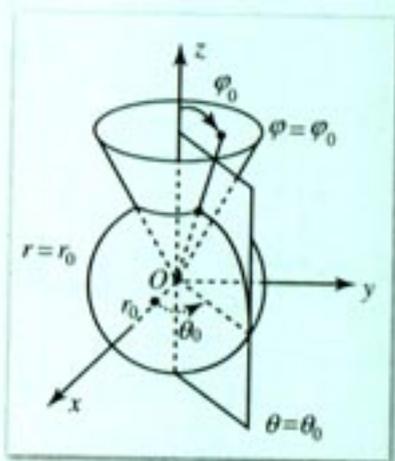


图 1-30

个极点和位于伦敦东南郊的格林尼治天文台原址所在点确定的地球的一个大圆. 这样就建立了直角坐标系. xOy 平面把地球分为南北两半球, 以此为起点分为南北纬度各 90 度. zOx 平面把地球分为东西两半球, 以此为起点分为东西经度各 180 度, 如图 1-31 所示.

把某地记为空间中的一点 M , 若地处北半球, 设 \overrightarrow{OM} 与 z 轴正向的夹角为 $(90-\varphi)$ 度, 则称此地的纬度是北纬 φ 度, 如北京处于北纬 40 度; 若地处南半球, 设 \overrightarrow{OM} 与 z 轴负向的夹角为 $(90-\varphi)$ 度, 则称南纬 φ 度, 如巴西利亚处于南纬 16 度.

点 M 与 z 轴生成一个半平面, 设它与 zOx 坐标面的夹角为 θ 度 (以 zOx 的前半平面为计算起点). 若地处东半球 (图中与 y 轴正半轴相对应), 则称此地的经度是东经 θ 度, 如北京处于东经 118 度; 若地处西半球 (图中与 y 轴负半轴对应), 则称此地的经度是西经 θ 度, 如巴西利亚处于西经 48 度.

[图形演示] (见课件) 球坐标系.

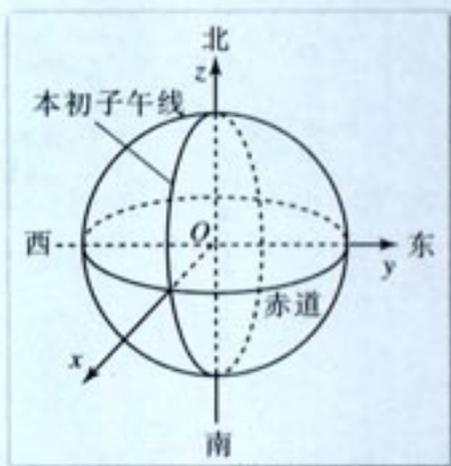


图 1-31

练习

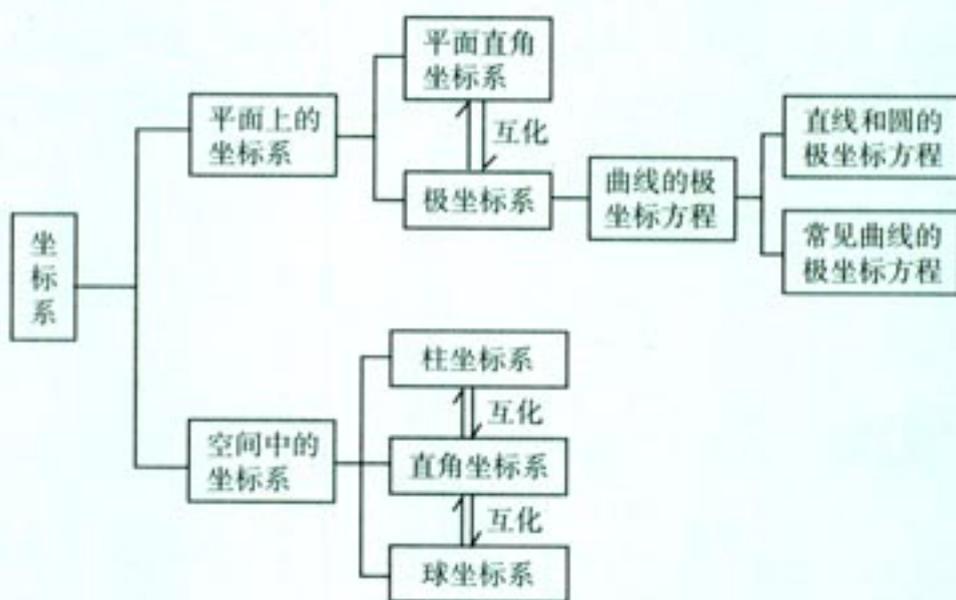
1. 设点的球坐标为 $(r, \theta, \varphi) = (2, \frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$, 求它的直角坐标.
2. 设点的直角坐标为 $(\sqrt{2}, -1, 1)$, 求它的球坐标.
3. 从地图上查找你所在地区的经纬度, 仔细思考其含义, 并转换为标准的球坐标 (r, θ, φ) .

习题 1-5

1. 设点的直角坐标为 $(\sqrt{2}, -1, -3)$, 求它的柱坐标.
2. 在柱坐标中, 方程 $\rho=1$ 表示空间中的什么曲面? 方程 $z=-1$ 表示什么曲面?
3. 设点的直角坐标为 $(0, 1, 1)$, 求它的球坐标.
4. 在球坐标中, 方程 $r=1$ 表示空间的什么曲面? 方程 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 表示空间的什么曲面?

本章小结

I 知识结构



II 思考与交流

对下列问题认真思考和分析,总结本章所学主要知识,深入理解坐标系是解析几何的基础,选取适当的坐标系可使曲线的方程更简单,研究问题更方便.

1. 平面上点的直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的含义是什么?说明二者之间的关系.
2. 空间中点的直角坐标 (x, y, z) 和柱坐标 (ρ, θ, z) 、球坐标 (r, θ, φ) 的含义是什么?说明三者之间的关系.
3. 说明平面曲线的直角坐标方程和极坐标方程的概念,分析二者的异同点,两种方程之间如何互化?
4. 说明过极点的直线的极坐标方程的形式.
5. 说明过极点且圆心在极轴上的圆的极坐标方程的形式,以及它与该圆的直角坐标方程的互化.类似讨论过极点且圆心在射线 $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ 上的圆的极坐标方程.
6. 结合例题说明求曲线的极坐标方程的一般步骤.这和求曲线的直角坐标方程的思路有

何异同点.

III 巩固与提高

- 极坐标方程 $\rho \cos \theta = 3$ ($\rho > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$) 表示什么曲线? 并求出曲线上点的极坐标, 使它的极角 θ 分别等于 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}$.
- 极坐标方程 $\rho \sin \theta = 1$ ($\rho > 0, 0 < \theta < \pi$) 表示什么曲线? 并求出曲线上点的极坐标, 使它的极径 ρ 分别等于 $1, 2, \sqrt{2}$.
- 说明下列极坐标方程表示什么曲线, 并作它们的简图:
 - $\rho \cos \theta = 4$; (2) $\rho = 9 \cos \theta$;
 - $\rho = 16 \sin \theta$.
- 把下列直角坐标方程化为极坐标方程, 并对相应的曲线加以说明:
 - $x^2 + y^2 = 16$; (2) $x^2 + y^2 + 6y = 0$;
 - $x^2 + y^2 = 10x$.
- 把下列极坐标方程化为直角坐标方程:
 - $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$;
 - $\rho = \cos \theta - 2 \sin \theta$;
 - $\rho = \sin^2 \theta$.
- 把圆的极坐标方程 $\rho = -\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta$ 化为直角坐标方程, 并且求出圆心和半径.
- 设过原点 O 的直线与圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 的一个交点为 P , 点 M 为线段 OP 的中点. 当点 P 在圆上移动一周时, 求点 M 的轨迹方程 (极坐标方程), 并作出简图.
- 长为 4 的线段 AB , 其端点 A 和 B 分别在极轴和射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所在的两条直线上滑动, 从极点作 AB 的垂线, 垂足为 M , 求点 M 的轨迹方程 (极坐标方程).
- 从极点 O 作射线, 交直线 $\rho \cos \theta = 3$ 于点 M , P 为线段 OM 上的点, 且 $|OM| \cdot |OP| = 12$, 求 P 点的轨迹方程.

IV 自测与评估

- 把点 M 的直角坐标 $(-\sqrt{3}, -1)$ 化为极坐标.
- 求适合下列条件的圆的极坐标方程:
 - 圆心在极点, 半径等于 5;

- (2) 圆心在点 $A\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$, 半径等于 a ;
- (3) 圆心在点 $B(a, 0)$, 半径等于 a ;
- (4) 圆心在点 $C(5, \pi)$, 半径等于 5.
3. 把曲线的极坐标方程 $\rho = -4\sin\theta + \cos\theta$ 化为直角坐标方程, 并说明它表示什么曲线.
4. 把圆的直角坐标方程 $x^2 + y^2 = 12ay$ 化为极坐标方程, 其中 $a > 0$.
5. 从极点 O 作直线, 它与给定直线 $\rho\sin\theta = 8$ 交于点 P , 在 OP 上取一点 M , 使 $|OM| \cdot |OP| = 16$, 求点 M 的轨迹方程 (极坐标方程), 并说明它表示什么曲线.



常见曲线的极坐标方程

在今后的学习和研究中, 常见到一些用极坐标方程表示的平面曲线. 下面简单介绍这些曲线的极坐标方程及它们的图形.

1. 阿基米德螺线

阿基米德螺线的极坐标方程为

$$\rho = a\theta, \quad a > 0. \quad (1-13)$$

当 $\theta = 0$ 时, $\rho = 0$, 对应极点 O . 当 θ 增加时, ρ 按比例增加. 当 θ 增加 2π 时, ρ 增加 $2\pi a$. 用描点法可作出该螺线的图形. 图 1-32 的 (1) 对应 $\rho = \theta, \theta \geq 0$; 而 (2) 对应 $\rho = \theta, \theta \leq 0$.

由螺线的图形可见, 过极点 O 的每一条射线被曲线截成无穷多线段, 各线段的长皆为 $2\pi a$.

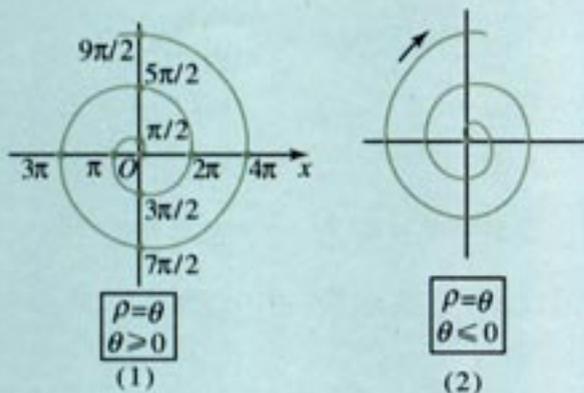


图 1-32

阿基米德螺线可以看作质点的运动轨迹. 设运动开始时质点 M 位于一射线 l 的始端 O , 射线绕固定点 O 作匀角速转动, 质点从 O 点出发沿射线 l 作匀速运动, 则质点 M 的运动轨迹是阿基米德螺线.

可以想象一只小虫在唱片上由中心沿半

径匀速向外爬行, 而唱片匀角速旋转, 则小虫的运动路线为该螺线.

阿基米德螺线可应用于机械设计. 把凸轮的轮廓线作成阿基米德螺线的形状, 可以把匀角速转动转换为匀速直线运动. 因此常称阿基米德螺线为等速螺线. 有时把等速螺线写成 $\rho = \rho_0 + a\theta$ 的形式, 其中 ρ_0 为常数.

回顾直角坐标方程 $y = ax$, 它表示平面上的一条直线. 而极坐标方程 $\rho = a\theta$ 表示螺线. 以方程观点看问题, 两个方程的形式相同, 只是表示变量的字母不同而已. 但是由于坐标系不同, 它们表示的曲线完全不同.

[图形演示] (见课件) 阿基米德螺线.

2. 心形线

心形线的极坐标方程为

$$\rho = a(1 - \cos \theta), \quad a > 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1-14)$$

用描点法作方程的图形, 如图 1-33 所示. 图形和心脏的截面轮廓线相似, 故称为心形线. 它对称于极轴所在的直线. θ 的

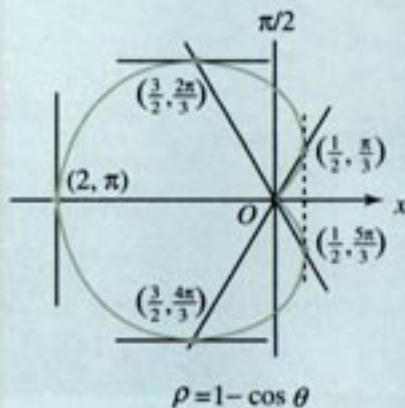


图 1-33

取值范围也可以是 $[-\pi, \pi]$ ，由于函数是 θ 的偶函数，因此曲线关于极轴所在的直线对称。

用不同的方法可生成心形线。在相应的“图形演示”课件中，就展示了生成心形线的过程。在第二章的“阅读与欣赏”中，详细叙述并推导了心形线的方程。下面的例也是一种生成心形线的方法。

心形线的方程也可以写成下面的形式

$$\rho = a(1 + \cos \theta), \quad a > 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1-15)$$

它的图形如图 1-34 所示。

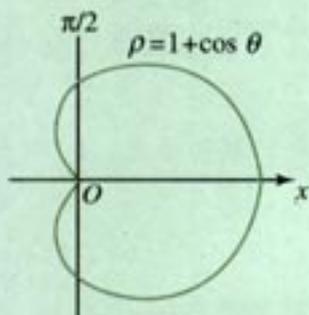


图 1-34

例 设 O 为直径等于 a 的圆上的一点，过 O 点任意作直线交圆于 P 点。在射线 OP 上取一点 M ，使 $|PM| = a$ 。当 P 点在圆上移动一周时，求相应的点 M 的轨迹方程。

解：如图 1-35 所示，以点 O 为极点，从点 O 开始过圆心的射线为极轴，建立极坐标系。设圆上动点 P 的极坐标为 (r, φ) ，点 M 的极坐标为 (ρ, θ) ，则圆的方程为

$$r = a \cos \varphi.$$

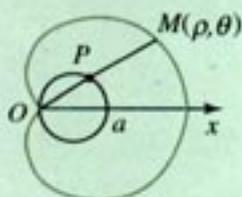


图 1-35

由 $|PM| = a$ ，得 $\rho = r + a$ 。又 $\theta = \varphi$ ，把 $r = \rho - a$ 和 $\varphi = \theta$ 代入圆的方程，得

$$\rho - a = a \cos \theta,$$

$$\rho = a(1 + \cos \theta).$$

这正是心形线的极坐标方程。因此，上述动

点 M 的轨迹是心形线。这是由圆生成心形线的一种方法。

[图形演示] (见课件) 心形线的一种生成过程。

3. 双纽线

双纽线的极坐标方程为

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta,$$

$$\text{或 } \rho = a \sqrt{\cos 2\theta} \quad (a > 0), \quad -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ \text{与 } \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}. \quad (1-16)$$

用描点法先作出当 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 时的方程的图形，如图 1-36 所示。因为 ρ 为 θ 的偶函数，所以图形对称于极轴。由此可作出 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq 0$ 的图形。

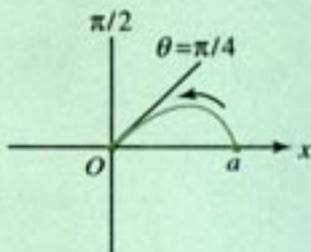


图 1-36

又由

$$\cos 2(\pi - \theta) = \cos 2\theta,$$

知方程 $\rho = \rho(\theta) = a \sqrt{\cos 2\theta}$ 满足关系式

$$\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta).$$

因此图形关于射线 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 所在的直线对称。由此可以作出方程的全部图形，如图 1-37 所示。

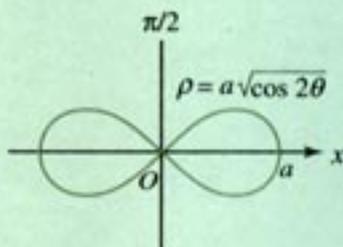


图 1-37

双纽线方程的另一形式为

$$\rho^2 = a^2 \sin 2\theta,$$

或

$$\rho = a \sqrt{\sin 2\theta}. \quad (1-17)$$

它的图形如图 1-38 所示.

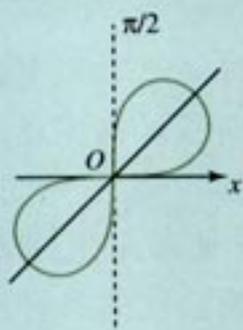


图 1-38

顺便指出, 如果按方程

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

作双纽线的图形, 并且允许 ρ 取负值, 则有

$$\rho = \pm a \sqrt{\cos 2\theta}.$$

此时 θ 的取值范围为 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

[图形演示] (见课件) 双纽线.

在平面上建立直角坐标系后，就可以用一个有序数对 (x, y) 来表示平面上的一个点。当平面上的点按一定规则运动时就形成一条平面曲线。描述点的运动规则就是曲线上点 M 的两个坐标 x 和 y 之间的一个制约关系，它可以表示为变量 x, y 的一个二元方程 $F(x, y) = 0$ ，称此二元方程为曲线的方程，它是直角坐标方程。借助于曲线的方程可以用代数方法分析曲线的某些重要性质，讨论曲线的各种应用。

常见的许多曲线往往是物体在实际运动中的轨迹。这时运动的规律经常不是直接反映为物体位置的坐标 x 和 y 之间的相互关系，而表现为物体的位置随时间改变的规律，也就是位置的坐标 x 和 y 对时间 t 的依赖关系。例如，一抛射体在重力作用下的运动轨道是抛物线，为了研究抛射体的运动，先要建立它的轨道曲线。要想建立它的直角坐标方程，就要找到运动中物体所在位置的坐标 x 和 y 的直接关系。由于抛射体运动在这方面的特征不很明显，因此直接建立轨道曲线的直角坐标方程不方便。但是物体的运动直接和时间相关联，以时间 t 为中介，运用物理学知识分别建立直角坐标 x, y 与 t 的关系式，就唯一确定了物体的运动轨迹，也就间接建立了 x 和 y 的关系。这就是本章要介绍的曲线的参数方程。

顺便指出，参数方程也是函数的重要表达形式，在高等数学深入研究函数的过程中，参数方程是常用的函数形式。在本章的学习中，要了解常见曲线的参数方程与相应的图形，逐步掌握用向量知识推导某些轨迹曲线的参数方程的基本方法。

2.1 曲线的参数方程

2.1.1 抛射体的运动

先看一个实例。

火炮发射炮弹后，炮弹在空中形成一条轨道曲线。为了简单起见，给出下面的假设条件：

- (1) 炮弹在空中的运动在一个铅直平面上运动，即轨道曲线为一平面曲线；
- (2) 炮弹在运动中仅受重力作用，不计空气阻力，也不受其他环境的影响；
- (3) 炮弹的初速度为 v_0 ，发射角（仰角）为 α 。

为了描述这一运动，就要建立轨道曲线的方程。为此先在轨道曲线所在的平面上建立直角坐标系，以火炮所在位置（炮口）为原点，地平线（水平方向）为 x 轴， y 轴竖直向上，如图 2-1 所示。把时间记为 t ，开始发射时，记 $t=0$ 。

设时刻 t 时炮弹所在位置为点 $M(x, y)$, 它是轨道曲线上的动点. 下面分别讨论坐标 x, y 与时间 t 之间的关系.

用向量知识, 在 x 轴、 y 轴方向上分解炮弹的速度向量 v_0 , 可得

$$v_0 = v_x + v_y.$$

其中 v_x, v_y 分别表示速度向量 v_0 在 x 轴、 y 轴上的分向量.

记 v_0, v_x, v_y 分别为向量 v_0, v_x, v_y 的大小, 则

$$v_x = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha.$$

由物理学知识可知, 炮弹在水平方向作匀速直线运动, 在竖直方向作竖直上抛运动, 因此得

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \quad (2-1)$$

其中 v_0, α 为常数, g 是重力加速度 (一般 $g \approx 9.8 \text{ m/s}^2$).

(2-1) 式是描述炮弹轨道曲线的参数方程, 其中 t 称为参数. 用方程 (2-1) 分析炮弹的运动十分方便, 比如可以随时算出炮弹所在位置 $M(x, y)$. 用计算机适时输出坐标 x 和 y , 它就是炮弹飞行的水平距离和高度. 火炮指挥仪的基本数学模型就是方程 (2-1). 当然, 实际中必须考虑空气阻力和风力、气温等各种环境条件及其他因素, 这样就在方程 (2-1) 的基础上形成了复杂的弹道方程组.

参数方程 (2-1) 可以通过消去参数 t , 变换为直角坐标方程. 把 $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ 代入 y 的表达式, 得

$$y = \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2. \quad (2-2)$$

由此可见, 轨道曲线为一抛物线.

在 (2-2) 中, 令 $y=0$, 解得 $x_1=0, x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. 由此可知, 炮弹的水平射程为

$$\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

把方程 (2-2) 变形为

$$y - \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \left(x - \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g} \right)^2,$$

易知, 当 $x_0 = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}$ 时, $y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$. 此时, 炮弹处于轨道曲线的最高点 (x_0, y_0) , 即

炮弹的最大高度为 $\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$.

例 1 设飞机以匀速 $v=150 \text{ m/s}$ 作水平飞行, 若在飞行高度 $h=588 \text{ m}$ 处投弹 (设炸弹的初速度等于飞机的速度),

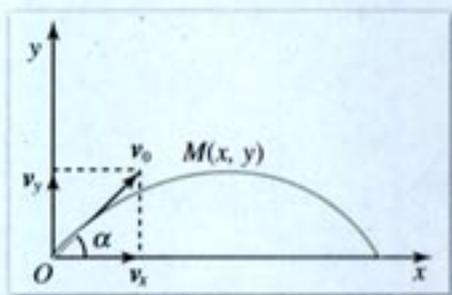


图 2-1

- (1) 求炸弹离开飞机后的轨迹方程;
 (2) 试问飞机在离目标多远(水平距离)处投弹才能命中目标.

解: 如图 2-2 所示, A 为投弹点, 坐标为 $(0, 588)$, B 为目标, 坐标为 $(x_0, 0)$. 记炸弹飞行的时间为 t , 在 A 点 $t=0$. 设 $M(x, y)$ 为飞行曲线上的任一点, 它对应时刻 t . 炸弹初速度 $v_0=150$ m/s, 用物理学知识, 分别计算水平、竖直方向上的路程, 得

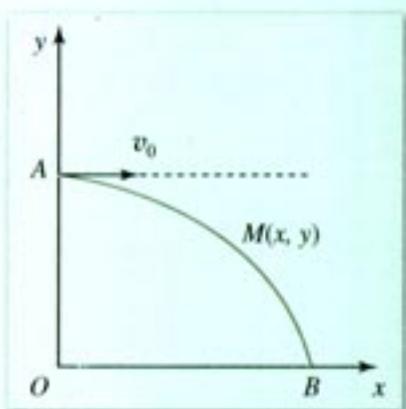


图 2-2

$$\begin{cases} x=v_0t \\ y=588-\frac{1}{2}gt^2 \quad (g=9.8 \text{ m/s}^2) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x=150t \\ y=588-4.9t^2 \end{cases}$$

这是炸弹飞行曲线的参数方程.

- (2) 炸弹飞行到地面目标 B 处的时间 t_0 满足方程 $y=0$, 即

$$588-4.9t^2=0,$$

解得 $t_0=2\sqrt{30}$.

由此得

$$x_0=150 \times 2\sqrt{30}=300\sqrt{30} \approx 1643(\text{m}).$$

即飞机在离目标 1 643 m (水平距离) 处投弹才能击中目标.



练习

按方程 (2-1) 分别写出 $\alpha=30^\circ, 60^\circ$ 时抛射体运动的参数方程, 化为直角坐标方程, 画出相应抛物线的简图.

2.1.2 曲线的参数方程

上一节抛射体运动的分析过程可以推广到一般的质点运动问题.

设质点的运动规律为

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b.$$

其中 $f(t), g(t)$ 为时间 t 的函数. 对任一时刻 t , 由上式得到一对数 x 和 y , 点 $M(x, y)$ 就是质点在时刻 t 的位置, 质点在每一时刻的位置都在运动曲线上. 反之, 运动曲线上的每一点必定是质点在某一时刻 t 按上式得出的位置 $M(x, y)$.

根据上述运动规律和曲线的关系,下面给出一般曲线的参数方程的概念.

定义 设在平面上取定了一个直角坐标系 xOy , 把坐标 x, y 表示为第三个变量 t 的函数

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b. \quad (2-3)$$

如果对于 t 的每一个值 ($a \leq t \leq b$), (2-3) 式所确定的点 $M(x, y)$ 都在一条曲线上; 而这条曲线上的任一点 $M(x, y)$, 都可由 t 的某个值通过 (2-3) 式得到, 则称 (2-3) 式为该曲线的参数方程, 其中变量 t 称为参数.

简单地说, 若 t 在 $a \leq t \leq b$ 内变动时, 由 (2-3) 式确定的点 $M(x, y)$ 描出一条曲线, 则称 (2-3) 式为该曲线的参数方程.

曲线的参数方程是通过曲线上点的坐标 x 和 y 与 t 的关系来反映 x 和 y 之间的联系的. 如果能从方程中消去参数 t , 就得到联系 x 和 y 的方程 $F(x, y)=0$, 而且这个方程的每一组解 (x, y) 都可从 t 的某个值通过 (2-3) 式得到, 则方程 $F(x, y)=0$ 就是这条曲线的直角坐标方程 (即普通方程). 上述抛射体运动曲线的参数方程可以转化为曲线的普通方程, 它是一条抛物线.

一条曲线是用直角坐标方程表示还是用参数方程表示, 要根据具体情况确定.

例 2 设质点沿以原点为圆心, 半径为 2 的圆作匀角速运动, 角速度为 $\frac{\pi}{60}$ rad/s. 试以时间 t 为参数, 建立质点运动轨迹的参数方程.

解: 如图 2-3 所示, 运动开始时质点位于点 A 处, 此时 $t=0$. 设动点 $M(x, y)$ 对应时刻 t , 由图可知

$$\begin{cases} x=2\cos \theta \\ y=2\sin \theta \end{cases}$$

又 $\theta = \frac{\pi}{60}t$ (t 以 s 为单位), 得参数方程

$$\begin{cases} x=2\cos \frac{\pi}{60}t \\ y=2\sin \frac{\pi}{60}t \end{cases} \quad t \geq 0.$$

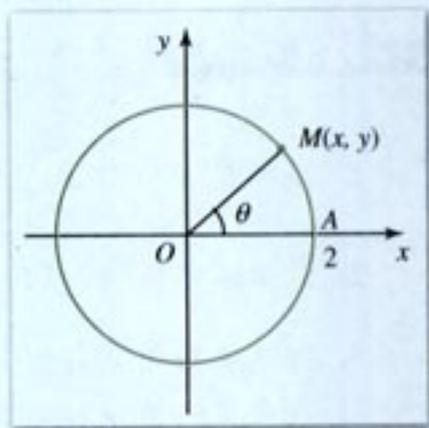


图 2-3

曲线的直角坐标方程常常可以转化为参数方程, 转化的关键是找到一个适当的参数. 曲线的普通方程和参数方程之间有些容易转化, 有些则较困难, 有些无法转化.

应该指出, 对一般的参数方程, 参数可能有物理意义, 如抛射体运动曲线的参数方程中, 参数 t 表示运动时间. 参数也可能有几何意义, 如例 2 表示圆的方程

$$\begin{cases} x=2\cos \theta \\ y=2\sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

中, θ 可作为参数, 它的几何意义是相应的圆心角. 参数可能既无物理意义, 也无几何意义. 这都要视具体情况而定.

例 3 选取适当参数, 把直线方程 $y=2x+3$ 化为参数方程.

解：选 $t=x$ ，则

$$y=2t+3.$$

由此得直线的参数方程

$$\begin{cases} x=t \\ y=2t+3 \end{cases} \quad (t \text{ 为任意实数})$$

也可以选 $t=x+1$ ，则 $y=2t+1$ ，参数方程为

$$\begin{cases} x=t-1 \\ y=2t+1 \end{cases}$$

由此可见，曲线的普通方程可化为不同形式的参数方程.



练习

设质点由原点开始沿某直线作匀速运动，速度为 2 cm/s ，直线的倾角为 $\frac{\pi}{4}$ 。试以时间 t 为参数，建立质点运动轨迹的参数方程。

习题 2-1

1. 按方程 (2-1) 写出当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时抛射体运动的参数方程，并求出射程及最大高度。
2. 设弹道曲线 (2-1) 中的 v_0 为定值，而 α 可以变动，证明：当 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时，射程最大。
3. 物体从高为 h 处以初速度大小 v_0 沿水平方向抛出，以抛出点为原点，过抛出点的水平直线为 x 轴，写出物体运动路线的参数方程，并求出物体落地的时间。
4. 设曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=3-2t \\ y=-1-4t \end{cases}$$

把它化为普通方程，说明它表示什么曲线。

2.2 直线和圆的参数方程

在数学 2 和选修课中已学习过直线和圆的直角坐标方程，把它们转化为参数方程形式很容易。直线和圆的参数方程对进一步学习数学十分重要，它有广泛的应用。

2.2.1 直线的参数方程

本节用几种思路讨论直线的参数方程：一是把直线看作质点的匀速运动曲线；二是从直线的普通方程转化为参数方程；三是用“向量方法”推导直线的参数方程。

设质点从点 $M_0(x_0, y_0)$ 出发，沿着与 x 轴成 α 角的方向作匀速直线运动，其速率为 v_0 。把速度向量在 x 轴、 y 轴上分解，其大小为

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

如图 2-4 所示，设 $M(x, y)$ 为 t 时刻质点所在位置，则有

$$\begin{cases} x = x_0 + v_x t = x_0 + t v_0 \cos \alpha \\ y = y_0 + v_y t = y_0 + t v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad t \geq 0.$$

当 t 变化时，动点 $M(x, y)$ 的轨迹是一条过点 M_0 ，倾斜角为 α 的射线，若不顾及 t 的物理意义，允许 t 取负值，则上式是直线的一种参数方程形式， t 为参数。

直线的参数方程可以从它的普通方程转化而来，设直线的点斜式方程为

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

其中 $k = \tan \alpha$ ， α 为直线的倾斜角，代入上式，得

$$y - y_0 = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (x - x_0), \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } \frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\sin \alpha}.$$

记上式的比值为 t ，整理后得

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cos \alpha \\ y = y_0 + t \sin \alpha \end{cases} \quad (2-4)$$

这是直线的参数方程，其中参数 t 有明显的几何意义。如图 2-5 所示，在直角三角形 M_0AM 中， $|M_0A| = |x - x_0|$ ， $|MA| = |y - y_0|$ ， $|M_0M| = |t|$ ，即 $|t|$ 表示直线上任一点 M 到定点 M_0 的距离。

下面给出用“向量法”推导直线参数方程的过程。

设直线过点 $M_0(x_0, y_0)$ ，且与平面向量 $\mathbf{a} = (l, m)$ 平行（或称直线与 \mathbf{a} 共线，其中 l, m 都不为 0），在直线上任取一点 $M(x, y)$ ，则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 \mathbf{a} 共线，即 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \mathbf{a}$ 。由两向量共线的充分必要条件以及 $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ ，可得

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

记上式的比值为 t ，整理后得

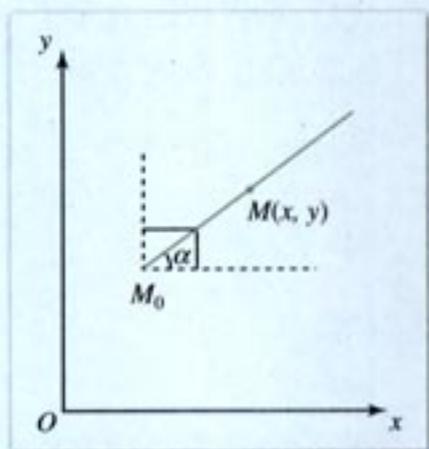


图 2-4

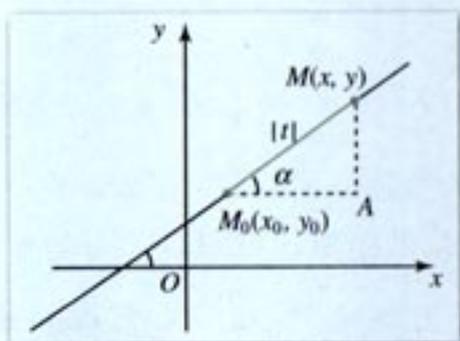


图 2-5

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2-5)$$

这是直线的参数方程的一般形式.

上述平面直线的参数方程的推导方法可以推广到空间直线, 而且空间直线参数方程的形式与 (2-5) 类似.

例 1 设直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=5+3t \\ y=10-4t \end{cases}$$

- (1) 求直线的直角坐标方程;
- (2) 化为参数方程 (2-4) 的形式.

解: (1) 把 $t = \frac{x-5}{3}$ 代入 y 的表达式, 得

$$y=10-\frac{4(x-5)}{3},$$

化简得

$$4x+3y-50=0,$$

这是直线的直角坐标方程;

(2) 把方程变形为

$$\begin{cases} x=5+\sqrt{3^2+4^2} \cdot \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}t=5+\frac{3}{5} \cdot (5t) \\ y=10-\sqrt{3^2+4^2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}t=10-\frac{4}{5} \cdot (5t) \end{cases}$$

令 $u=-5t$, 则方程变为

$$\begin{cases} x=5-\frac{3}{5}u \\ y=10+\frac{4}{5}u \end{cases}$$

记 $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ($\alpha \in [0, \pi)$), 点 $M_0(5, 10)$, 这是过 M_0 点, 倾斜角为 α 的直线的参数方程, u 为参数, 它是方程 (2-4) 的形式. $|u|$ 表示直线上的点 $M(x, y)$ 到定点 M_0 的距离, 点 $M(x, y)$ 与参数 u 对应.

例 2 设直线 l_1 过点 $A(2, -4)$, 倾斜角为 $\frac{5}{6}\pi$:

- (1) 求 l_1 的参数方程;
- (2) 设直线 $l_2: x-y+1=0$, l_2 与 l_1 的交点为 B , 求点 B 与点 A 的距离.

解: (1) 由方程 (2-4) 得 l_1 的参数方程可为

$$\begin{cases} x=2+t\cos \frac{5}{6}\pi \\ y=-4+t\sin \frac{5}{6}\pi \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y=-4+\frac{1}{2}t \end{cases}$$

(2) 如图 2-6 所示, B 点在 l_1 上, 只要求出 B 点对应的参数值 t , 则 $|t|$ 就是 B 到 A 的距离.

把 l_1 的参数方程代入 l_2 的方程中, 得

$$\left(2-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)-\left(-4+\frac{1}{2}t\right)+1=0,$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2}t=7,$$

$$t=\frac{14}{\sqrt{3}+1}=7(\sqrt{3}-1).$$

t 为正值, 知 $|AB|=7(\sqrt{3}-1)$.

例 3 直线过点 $A(1, 3)$, 且与向量 $(2, -4)$ 共线:

(1) 写出该直线的参数方程;

(2) 求点 $P(-2, -1)$ 到此直线的距离.

解: (1). 由方程 (2-5), 得参数方程

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-4t \end{cases}$$

(2) 如图 2-7 所示, 在直线上任取一点 $M(x, y)$, 则

$$\begin{aligned} |PM|^2 &= (x+2)^2 + (y+1)^2 \\ &= (1+2t+2)^2 + (3-4t+1)^2 \\ &= 20t^2 - 20t + 25 \\ &= 20\left[\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right]. \end{aligned}$$

当 $t=\frac{1}{2}$ 时, $|PM|^2$ 取最小值, 此时 $|PM|$ 等于点 P 与直线的距离, 则

$$|PM|_{\min} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

我们可以验证所得的结果:

由 P 点向直线作垂线, 垂足记为 P_0 , 如图 2-7 所示, 它对应参数 $t=\frac{1}{2}$, 代入直线的参数方程, 可得 P_0 点的坐标: $x=2, y=1$, 即垂足 $P_0(2, 1)$. 显然有

$$|PP_0| = \sqrt{(2+2)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{5}.$$

例 4 如图 2-8 所示, 当前热带风暴中心位于点 O 处, 某海滨城市在它的西面 220 km 的点 A 处. 风暴正以 40 km/h 的速度向西偏北 60° 方向运动. 已知距风暴中心 200 km 以

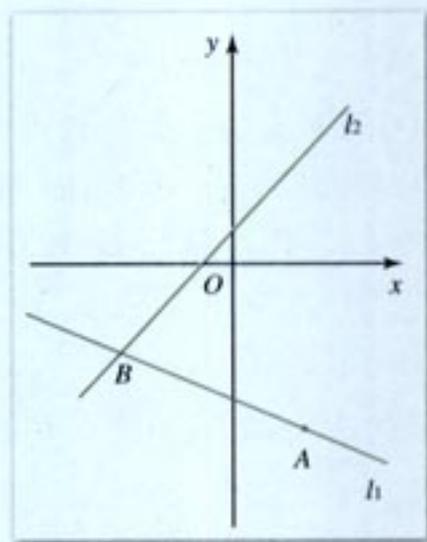


图 2-6

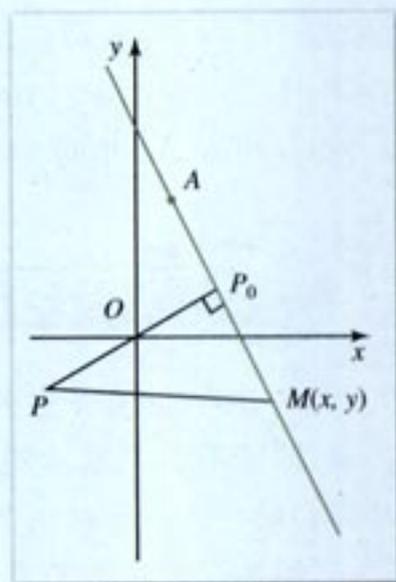


图 2-7

内的地方都会受风暴侵袭，计算经过多长时间该城市会受风暴侵袭，侵袭会持续多长时间。

解：如图 2-8 建立坐标系，按公式(2-4)建立直线 OP 的方程，得

$$\begin{cases} x = u \cos 120^\circ \\ y = u \sin 120^\circ \end{cases}$$

其中参数 u 表示点 P 到点 O 的距离。设风暴中心处于点 O 时，时间为 $t=0$ ，而到达点 P 的时间为 t (h)，则 $u=40t$ 。代入 OP 的参数方程，得

$$\begin{cases} x = -20t \\ y = 20\sqrt{3}t \end{cases}$$

记点 $A(-220, 0)$ 到点 P 的距离为 $|AP|$ ，则

$$\begin{aligned} |AP|^2 &= (-220 + 20t)^2 + (-20\sqrt{3}t)^2 \\ &= 20^2(4t^2 - 22t + 121). \end{aligned}$$

当 $|AP| \leq 200$ 时，城市就受到风暴侵袭。由

$$\begin{aligned} 20^2(4t^2 - 22t + 121) &\leq 200^2, \\ 4t^2 - 22t + 21 &\leq 0, \end{aligned}$$

解得

$$\frac{11 - \sqrt{37}}{4} \leq t \leq \frac{11 + \sqrt{37}}{4}.$$

近似得 $1.23 \leq t \leq 4.27$ 。

而 $1.23 \text{ h} \approx 1 \text{ h } 14 \text{ min}$ ， $4.27 \text{ h} \approx 4 \text{ h } 16 \text{ min}$ 。

由此可知，1 小时 14 分后城市就受到侵袭，侵袭时间要持续 3 小时 2 分。

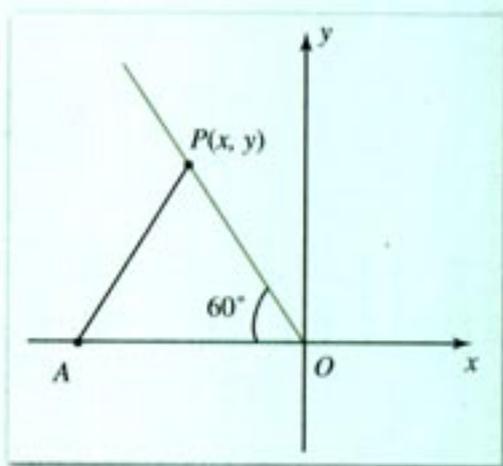


图 2-8

思考与讨论

例 3 的(2)有多种解法，可按下面的思路求解：

解法一 先求出过点 $P(-2, -1)$ 且垂直于给定直线的直线方程，把它化为(2-4)的形式，再按例 2 的方法求解；

解法二 用给定直线和垂线的两个普通方程联立，求解方程组，得交点 P_0 ，再求 $|PP_0|$ ；

解法三 向量 $b=(4, 2)$ 与向量 $(2, -4)$ 垂直，先求过点 $P(-2, -1)$ ，且与向量 b 共线的直线的参数方程。此方程与给定直线的普通方程联立，得出的参数值与交点 P_0 对应，再求 $|PP_0|$ 。

解完后，认真思考此题的四种解法，比较它们的优缺点，体会参数的作用。

练习

1. 直线过点 $(3, -5)$, 倾斜角为 $\frac{2}{3}\pi$, 求直线的参数方程.
2. 设直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - 4t \end{cases}$$

求点 $(3, 6)$ 到该直线的距离.

2.2.2 圆的参数方程

质点以匀角速度 ω 作圆周运动, 圆心在原点, 半径为 R . 下面建立运动的轨迹方程.

如图 2-9 所示, 记 t 为时间, 运动开始时 $t=0$, 质点位于点 A 处, 在时刻 t , 质点位于点 $M(x, y)$ 处. 由物理学知识, $\theta = \omega t$, θ 为 Ox 轴正向到向径 \overrightarrow{OM} 所成的角, 因此得

$$\begin{cases} x = R \cos \omega t \\ y = R \sin \omega t \end{cases} \quad t \geq 0.$$

这是圆周运动的轨迹方程, t 为参数, 也可以写成

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \end{cases} \quad (2-6)$$

θ 为参数, 若限制 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则 (2-6) 式为圆的参数方程, θ 有明显的几何意义.

(2-6) 式可以直接由圆的普通方程转化得出.

设方程

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2, \\ \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 &= 1. \end{aligned}$$

令 $\frac{x}{R} = \cos \theta$, 则 $\left(\frac{y}{R}\right)^2 = 1 - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$. 取 $\frac{y}{R} = \sin \theta$, 则得参数方程 (2-6).

若圆心在点 $M_0(x_0, y_0)$, 半径为 R , 则圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + R \cos \theta \\ y = y_0 + R \sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2-7)$$

这只要用平移的坐标变换公式, 就可由 (2-6) 式得出.

例 5 写出圆心在点 $(-1, 2)$, 半径为 3 的圆的参数方程.

解: 按方程 (2-7), 知参数方程为

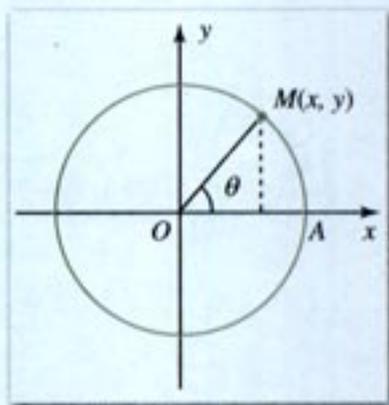


图 2-9

$$\begin{cases} x = -1 + 3\cos t \\ y = 2 + 3\sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

例 6 设直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

求它与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 的交点.

解: 把直线的参数方程代入圆的方程, 得

$$\begin{aligned} (1+t)^2 + (1-t)^2 &= 4, \\ t^2 &= 1, \end{aligned}$$

因此 $t_1 = -1$, $t_2 = 1$.

分别代入直线方程, 得

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

交点为 $A(0, 2)$ 和 $B(2, 0)$.



练习

1. 写出圆心在原点, 半径为 2 的圆的参数方程.
2. 求直线 l :

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$$

与圆 $x^2 + y^2 = 9$ 的交点.

3. 指出下列参数方程表示什么曲线:

$$(1) \begin{cases} x = 3\cos \theta \\ y = 3\sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2};$$

$$(2) \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad \pi \leq t \leq 2\pi;$$

$$(3) \begin{cases} x = 3 + 15\cos \theta \\ y = 2 + 15\sin \theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

习题 2-2

1. 直线的普通方程为 $x - 2y + 1 = 0$, 令 $x = 1 + 2t$, 写出直线的参数方程.
2. 直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}.$$

问点 $(-4, 7)$ 是否在该直线上, 说明理由.

3. 曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+2\cos t \\ y=-2+2\sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

把它化为直角坐标方程, 它表示什么曲线?

4. 圆的方程为 $x^2+y^2=2y$, 写出它的参数方程.

5. 设直线 l_1 过点 $(1, -2)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$, 直线 $l_2: x+2y-4=0$:

(1) 写出直线 l_1 的参数方程;

(2) 求直线 l_1 和 l_2 的交点.

6. 写出过点 $A(-1, 2)$, 倾斜角为 $\frac{3}{4}\pi$ 的直线的参数方程, 并求该直线与圆 $x^2+y^2=8$ 的交点.

2.3 圆锥曲线的参数方程

圆锥曲线指椭圆、抛物线和双曲线, 在某些研究领域中, 它们的参数方程用起来较方便. 椭圆的参数方程应用广泛.

2.3.1 椭圆的参数方程

设椭圆的普通方程为

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 &= 1. \end{aligned}$$

令 $\frac{x}{a} = \cos t$, 则 $\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$. 取 $\frac{y}{b} = \sin t$, 则得椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2-8)$$

若椭圆的中心不在原点, 而在点 $M_0(x_0, y_0)$, 相应的椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos t \\ y = y_0 + b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2-9)$$

例1 椭圆的方程为 $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{5} = 1$, 写出它的参数方程.

解: 由方程(2-9)可直接写出参数方程

$$\begin{cases} x=1+\sqrt{3}\cos t \\ y=-2+\sqrt{5}\sin t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

例 2 已知椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$$

点 M 在椭圆上, 对应参数 $t = \frac{\pi}{3}$, 点 O 为原点, 求直线 OM 的倾斜角 α .

解: 点 M 的坐标为

$$\begin{cases} x=2\cos \frac{\pi}{3}=1 \\ y=4\sin \frac{\pi}{3}=2\sqrt{3} \end{cases}$$

直线 OM 的斜率

$$k = \frac{2\sqrt{3}}{1} = 2\sqrt{3}.$$

因此倾斜角

$$\alpha = \arctan 2\sqrt{3}.$$

例 3 在椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 中作内接矩形, 问内接矩形的最大面积是多少.

解: 椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=5\cos t \\ y=4\sin t \end{cases}$$

设第一象限内椭圆上一点 $M(x, y)$, 由椭圆的对称性, 知内接矩形的面积为

$$\begin{aligned} S &= 4xy \\ &= 4 \cdot 5\cos t \cdot 4\sin t \\ &= 40\sin 2t. \end{aligned}$$

当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时, 面积 S 取得最大值 40, 此时

$$x = 5\cos \frac{\pi}{4} = \frac{5}{2}\sqrt{2},$$

$$y = 4\sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}.$$

因此, 矩形在第一象限的顶点为 $(\frac{5}{2}\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$, 此时内接矩形的面积最大, 为 40.

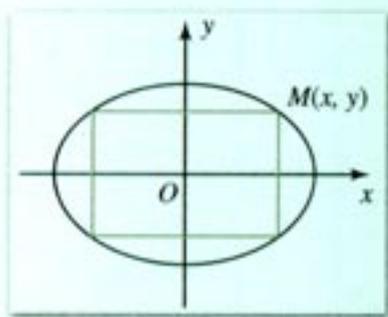


图 2-10

思考与讨论

椭圆的参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

中的参数 θ 有下述的几何意义.

如图 2-11 所示, 以原点为圆心, 分别以 a 和 b (不妨设 $b < a$) 为半径作两个同心圆, 由原点作射线交大圆于点 A , 交小圆于点 B , 由 x 轴正半轴到 OA 所成角为 θ . 过点 A 作 x 轴的垂线, 过点 B 作 y 轴的垂线, 两垂线交于点 $M(x, y)$. 由图可见

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$

因此点 M 在椭圆上, 当 θ 由 0 变到 2π 时, 动点 M 形成整个椭圆.

以上产生动点 M 的过程可以用来画椭圆的图形, 依此可制作画椭圆的仪器, 称为椭圆规.

如图 2-12 所示, 在金属板上做两条垂直的槽, 槽中各有一滑块. 把直尺上的枢纽 A, B 固定在滑块上. 在直尺上的某一位置 M 用套管装上铅笔. 当直尺 AB 连续移动时, 铅笔就画出椭圆来. 开始时 A 在中心, B 在右侧. 当 A 向下移动, B 向左移动时, M 由右顶点向上移动. 当 B 位于中心时, M 在上顶点. B 继续左移, A 开始上移. 当 A 又回到中心时, M 位于左顶点. 这样 M 画出了上半个椭圆. 类似地, 当 A 在上半部移动, B 自左向右移动, 就可以画出下半个椭圆.

请同学用图 2-13 说明 M 的轨迹是椭圆.

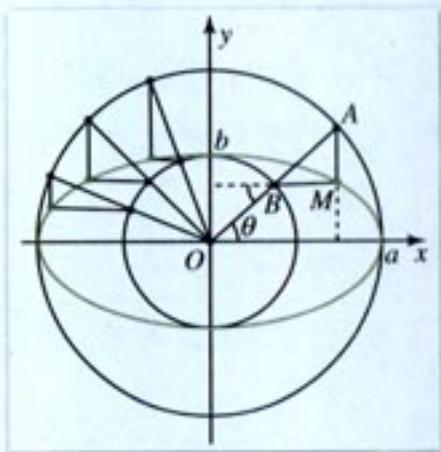


图 2-11

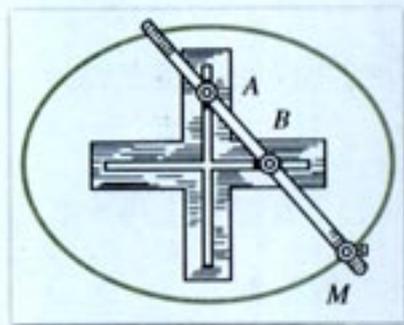


图 2-12

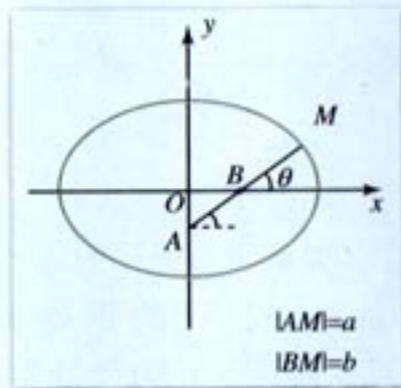


图 2-13



1. 写出椭圆 $x^2 + 4y^2 = 16$ 的参数方程.

2. 椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + 3\cos t \\ y = -2 + 2\sin t \end{cases}$$

点 P 为椭圆上对应 $t = \frac{\pi}{6}$ 的点, 求直线 OP 的斜率.

2.3.2 抛物线的参数方程

设抛物线的普通方程为

$$y^2 = 2px.$$

要选一个参数把它化为参数方程十分简单, 例如, 可选 y 自身为参数 t , 则 $x = \frac{t^2}{2p}$, 得抛物线的参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2p}t^2 \\ y = t \end{cases}$$

通常令 $t = \frac{1}{2p}y$, 则 $x = \frac{y^2}{2p} = 2pt^2$, 此时抛物线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases} \quad (2-10)$$

在 2.1 节讨论的抛射体的轨迹方程就是抛物线参数方程的一个具体形式.

例 4 设 M 为抛物线 $y^2 = 2x$ 上的动点, 给定点 $M_0(-1, 0)$, 点 P 为线段 M_0M 的中点, 求点 P 的轨迹方程 (如图 2-14 所示).

解: 令 $y = 2t$, 则 $x = \frac{y^2}{2} = 2t^2$, 得抛物线的参数方程

$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = 2t \end{cases}$$

动点 $M(2t^2, 2t)$, 定点 $M_0(-1, 0)$, 由中点的坐标公式得 P 点的坐标为

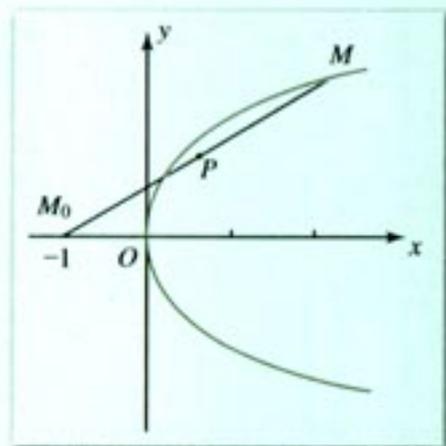


图 2-14

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(-1+2t^2) \\ y = \frac{1}{2}(0+2t) \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + t^2 \\ y = t \end{cases}$$

这就是 P 点的轨迹的参数方程, 可化为普通方程 $y^2 = x + \frac{1}{2}$, 这是以 x 轴为对称轴, 顶点在 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 的抛物线.



练习

1. 由抛物线 $y^2 = 2x$ 上各点作 y 轴的垂线段, 求线段中点的轨迹方程 (参数形式).
2. 连接原点 O 和抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上的动点 M , 延长 OM 到 P 点, 使 $|OM| = |MP|$, 求 P 点的轨迹方程, 说明它是什么曲线.

2.3.3 双曲线的参数方程

设双曲线的普通方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

即

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

令 $\frac{x}{a} = \sec \theta$, 由三角公式 $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$, 得

$$\left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1 = \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta.$$

取 $\frac{y}{b} = \tan \theta$, 得双曲线的参数方程

$$\begin{cases} x = a \sec \theta \\ y = b \tan \theta \end{cases} \quad (2-11)$$

例5 求点 $M_0(0, 2)$ 到双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的最小距离 (即双曲线上任一点 M 与点

M_0 距离的最小值).

解: 把双曲线方程化为参数方程

$$\begin{cases} x = \sec \theta \\ y = \tan \theta \end{cases}$$

设双曲线上动点为 $M(\sec \theta, \tan \theta)$, 则

$$\begin{aligned} |M_0M|^2 &= \sec^2 \theta + (\tan \theta - 2)^2 \\ &= (\tan^2 \theta + 1) + (\tan^2 \theta - 4 \tan \theta + 4) \\ &= 2 \tan^2 \theta - 4 \tan \theta + 5 \\ &= 2(\tan \theta - 1)^2 + 3. \end{aligned}$$

当 $\tan \theta - 1 = 0$, 即 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $|M_0M|^2$ 取最小值 3, 此时有

$$|M_0M| = \sqrt{3},$$

即 M_0 点到双曲线的最小距离为 $\sqrt{3}$.



练习

设 P 为等轴双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 上的一点, F_1 和 F_2 为两个焦点, 证明:

$$|F_1P| \cdot |F_2P| = |OP|^2.$$

习题 2-3

1. 设直线的参数方程为

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$$

它与椭圆 $\frac{4x^2}{9} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的交点为 A 和 B , 求线段 AB 的长.

2. 设 $M(x, y)$ 为椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上的动点, 求 $x + 2y$ 的最大值和最小值.

3. 设 AB 为椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的一条弦, 点 $M(2, -1)$ 为 AB 的中点, 求 AB 所在直线的参数方程.

4. 设直线 $l: 3x + 8y + 72 = 0$, 椭圆 $C: \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$. 求椭圆 C 到直线 l 的最小距离 (即椭圆上任一点 M 到直线的距离的最小值).

5. 由圆 $x^2 + y^2 = 25$ 上动点 M 作 y 轴的垂线, 交 y 轴于 N 点, 设线段 MN 的中点为

P , 求点 P 的轨迹方程.

6. 过点 $A(1, 0)$ 的直线 l 与抛物线 $y^2 = 8x$ 交于 M, N 两点, 求线段 MN 的中点的轨迹方程.

2.4 一些常见曲线的参数方程

在生产实践和科学研究中, 常会见到某些装置的轮廓线及一些物体在运动中的轨迹是一些特殊的曲线, 如翻土机的犁铧运动的轨迹为长幅摆线, 某些机器上齿轮的轮廓线为圆的渐开线等.

这些曲线大多是用参数方程表示的, 本节主要讨论摆线和圆的渐开线的参数方程. 关于星形线的讨论放在“阅读与欣赏”中.

2.4.1 摆线的参数方程

设想你的自行车外胎上粘了一点白色的油漆, 当你骑车向前直行时, 这个油漆白点就在空中描绘出一条曲线, 这条曲线就是摆线, 也称为旋轮线.

用数学语言描述如下:

一圆周沿一直线作无滑动滚动时, 圆周上的一定点 M 的轨迹称为摆线 (如图 2-15 所示).

下面建立摆线的参数方程.

如图 2-16 所示, 设半径为 a 的圆在 x 轴上滚动, 开始时定点 M 在原点 O 处. 取圆滚动时转过的角度 t (以弧度为单位) 为参数. 当圆滚过 t 角时, 圆心为点 B , 圆与 x 轴的切点为 A , 定点 M 的位置如图所示, $\angle ABM = t$.

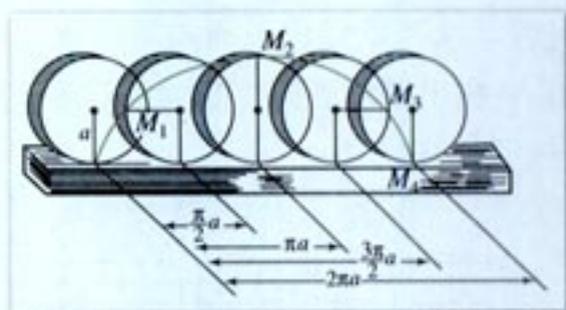


图 2-15

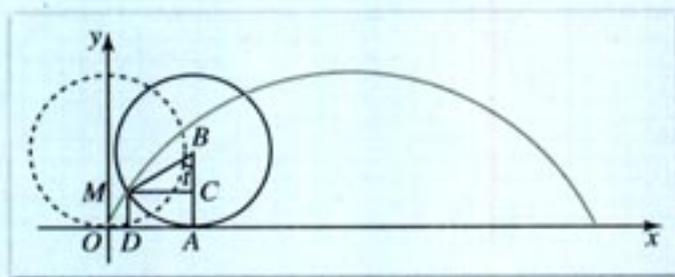


图 2-16

由于圆在滚动时不滑动, 因此线段 OA 的长和圆弧 \widehat{AM} 的长相等, 它们的长都等于 at , 从而得 B 点的坐标为 (at, a) , 向量

$$\overrightarrow{OB} = (at, a),$$

向量

$$\overrightarrow{MB} = (a \sin t, a \cos t),$$

$$\overrightarrow{BM} = (-a \sin t, -a \cos t),$$

因此

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM} \\ &= (at - a \sin t, a - a \cos t) \\ &= (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)).\end{aligned}$$

设动点 M 的坐标为 (x, y) , 则向量

$$\overrightarrow{OM} = (x, y),$$

所以

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (2-12)$$

这就是摆线的参数方程. 当点 M 的位置与图 2-16 不同时, 可导出同样的表达式.

如果从方程 (2-12) 中消去参数 t , 可得摆线的直角坐标方程, 此时方程中含有反三角函数, 不便于讨论. 因此, 直接用参数方程讨论摆线的性质.

根据参数方程描绘曲线的图形也可用描点法. 给定一个参数 t 的值, 按参数方程计算出相应的 x, y 值, 描出点 $M(x, y)$, 它是曲线上的一点. 取适当多的 t 值, 逐一描点就得到相应曲线的图形. 摆线的图形如图 2-17 所示, 图中取 $a=2$, $0 \leq t \leq 2\pi$, 在 $[0, 2\pi]$ 内取 t 的 13 个值, 描出曲线的相应点. 我们称这段曲线为摆线的一拱. 按照摆线生成的过程, 这一拱相应于圆向前滚动一周. 圆再向前滚动一周, 相应于 t 由 2π 变到 4π . 此时, 点 M 描出摆线的第二拱, 第二拱的形状和前一拱完全相同. 圆继续向前滚动, 可得第三拱、第四拱……

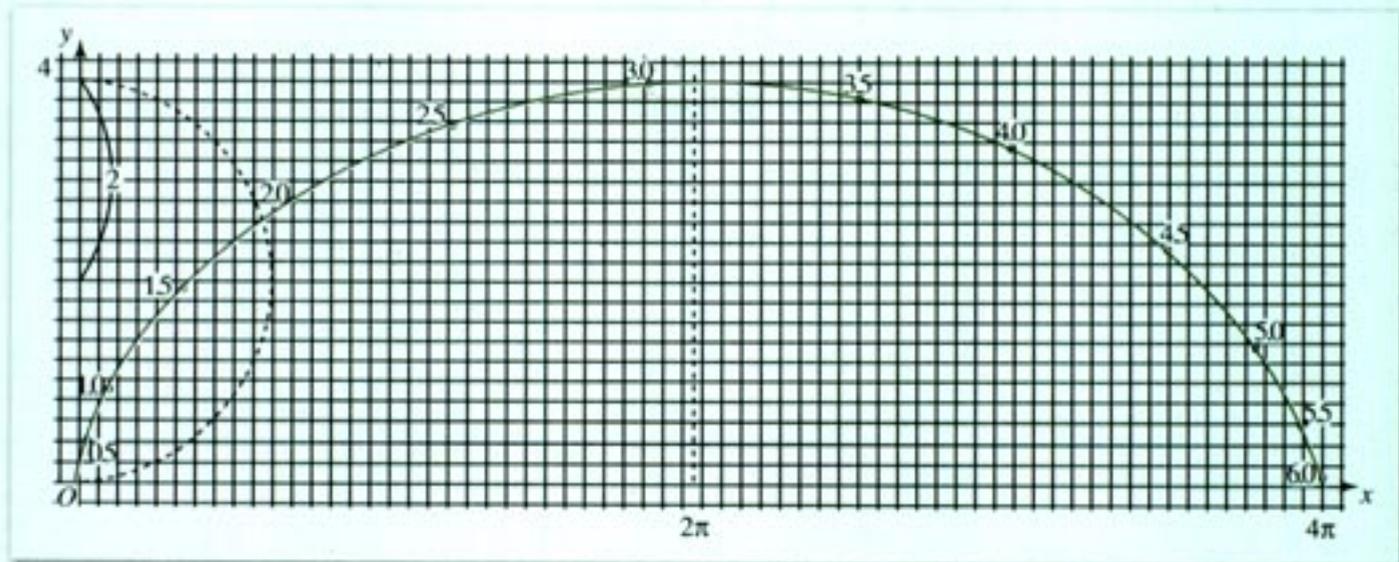


图 2-17

若取 $-\infty < t < +\infty$, 相应的图形如图 2-18 所示.

在方程 (2-12) 中, 任取两个参数值 t 和 $t+2\pi$, 相应点的纵坐标相等, 横坐标相差 $2\pi a$. 因此, 把相应于 $0 \leq t \leq 2\pi$ 的摆线的一拱向右平移 $2\pi a$, 刚好与相应于 $2\pi \leq t \leq 4\pi$ 的那一拱重合. 依次类推, 摆线的任一拱都可以由相应于 $0 \leq t \leq 2\pi$ 的那一拱经左右平移得

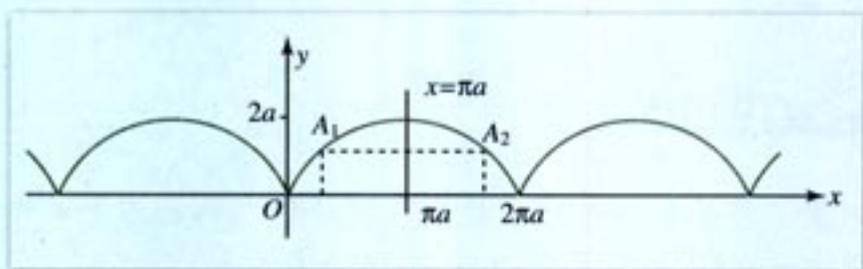


图 2-18

到. 这就是摆线的周期性.

摆线的每一拱都是左右对称的, 比如 $0 \leq t \leq 2\pi$ 上的这一拱对称于直线 $x = \pi a$, 如图 2-18 所示. 任取一参数值 t , 对应点 A_1 的纵坐标为

$$y_1 = a(1 - \cos t),$$

而参数 $2\pi - t$ 对应点 A_2 的纵坐标为

$$y_2 = a[1 - \cos(2\pi - t)] = a(1 - \cos t).$$

这表明 A_1 和 A_2 的纵坐标相等.

A_1 的横坐标为

$$x_1 = a(t - \sin t),$$

A_2 的横坐标为

$$\begin{aligned} x_2 &= a[(2\pi - t) - \sin(2\pi - t)] \\ &= 2\pi a - a(t - \sin t). \end{aligned}$$

由 $x_1 + x_2 = 2\pi a$, 知 A_1 和 A_2 中点的横坐标为

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \pi a.$$

因此, 摆线上的两点 A_1 和 A_2 关于直线 $x = \pi a$ 对称. 由于 t 值的任意性, 知点 A_1 为摆线这一拱上的任意一点, 因此这一拱摆线关于直线 $x = \pi a$ 对称.

摆线有些重要性质. 例如, 质点在重力作用下, 从固定点 A 滑动到固定点 B , 沿什么形状的轨道曲线所用的时间最短呢? 是沿直线 AB 滑动用时最少吗? 答案是: 上述的最速降线是一条翻转的摆线 (如图 2-19 所示).

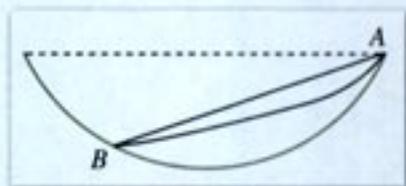


图 2-19

普通单摆的摆动周期与摆幅不是绝对无关的. 为了使摆动周期与摆幅完全无关, 可以在摆动平面内做两个摆线形状的挡板 (如图 2-20 的 \widehat{OA} 和 \widehat{OB}), 此时单摆的运动轨迹也是一条摆线.

如果把本节开始提出的问题略作变动, 则得出不同类型的曲线. 设想在自行车车轮的一根辐条上安装了一个小的红灯泡, 当夜晚骑车行进时, 灯泡将描绘出一条什么曲线呢? 这就是下面“探索与研究”的问题.

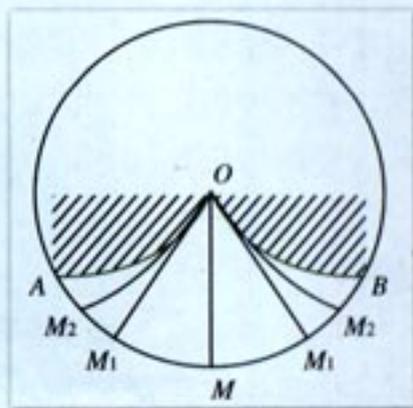


图 2-20

[图形演示] (见课件) 摆线的生成过程.

思考与讨论

认真分析用向量工具推导曲线的参数方程的过程，总结推导曲线的参数方程的基本思路、方法、步骤。

探索与研究

设有一半径为 a 的轮子沿直线轨道滚动，在轮辐上有一定点 M ，它与轮子中心的距离为 b ($b < a$)，求点 M 的轨迹方程。

设想点 M 在轮辐的延长线上，它与轮子中心的距离为 b ($b > a$)，求点 M 的轨迹方程。

解决此问题的思路和方法与本节推导摆线的方程类似，只要注意二者的某些差别就可以顺利完成。参考“阅读与欣赏”（变幅摆线）。

练习

设圆的半径为 4，沿 x 轴正向滚动，开始时圆与 x 轴相切于原点 O 。记圆上动点为 M ，它随圆的滚动而改变位置。写出圆滚动一周时 M 点的轨迹方程，画出相应曲线，求此曲线上纵坐标 y 的最大值，说明该曲线的对称轴。

2.4.2 圆的渐开线的参数方程

当你到工厂参观时，会看到许多机械加工设备。有些机械零件的轮廓线是一些特殊的曲线。例如齿轮的形态多种多样，有不少齿轮采用圆的渐开线齿形（如图 2-21 所示）。这种齿轮的齿形磨损小，传动平稳。

和摆线的情形类似，用参数方程表示圆的渐开线比较方便。

把一条没有弹性的细绳绕在一个固定不动的圆盘的侧面上，把绳拉紧逐渐展开，绳的外端点随之移动，且绳的拉直部分始终和圆相切。绳的端点移动的轨迹就是一条圆的渐开线，固定的圆称为渐开线的基础。

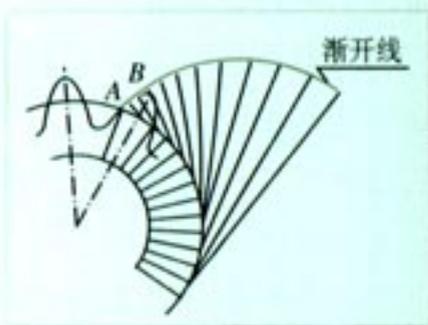


图 2-21

圆,如图 2-22 所示.

下面就按照给出的渐开线的直观定义用初等方法推导圆的渐开线的参数方程.

设基圆的半径为 a , 以圆心为原点 O , 绳端点的初始位置为 M_0 , 向量 $\overrightarrow{OM_0}$ 的方向为 x 轴正方向, 建立坐标系 (如图 2-23 所示). 设渐开线上的任意点 $M(x, y)$, 绳拉直时和圆的切点为 A , 故 $OA \perp AM$. 按渐开线定义, 弧 $\widehat{AM_0}$ 的长和线段 AM 的长相等, 记 \overrightarrow{OA} 和 x 轴正向所成的角为 t (以弧度为单位), 则

$$|AM| = \widehat{AM_0} = at.$$

作 AB 垂直于 x 轴, 过 M 点作 AB 的垂线.

由三角及向量知识, 得

$$\overrightarrow{OA} = (a \cos t, a \sin t).$$

由几何知识知 $\angle MAB = t$, 而且

$$\overrightarrow{AM} = (at \sin t, -at \cos t),$$

得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} \\ &= (a \cos t + at \sin t, a \sin t - at \cos t) \\ &= (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t)). \end{aligned}$$

又 $\overrightarrow{OM} = (x, y)$, 因此有

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad (2-13)$$

这就是圆的渐开线的参数方程.

[图形演示] (见课件) 圆的渐开线.

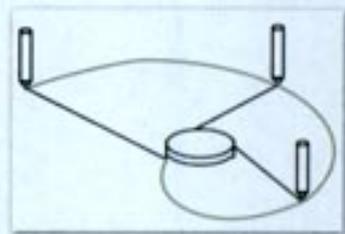


图 2-22

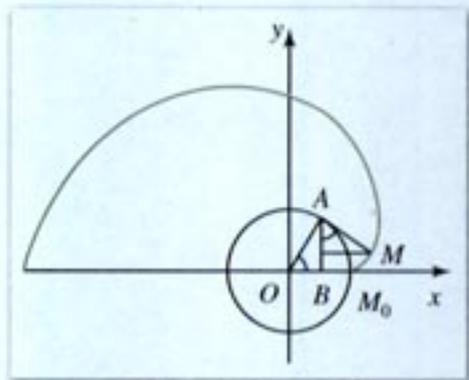


图 2-23



练习

写出半径为 2 的基圆的渐开线方程.

习题 2-4

1. 求摆线

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

与直线 $y=2$ 的交点的直角坐标.

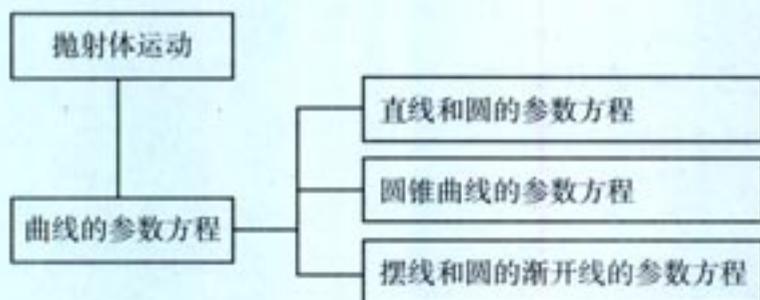
2. 求圆的渐开线

$$\begin{cases} x=3(\cos t+t\sin t) \\ y=3(\sin t-t\cos t) \end{cases}$$

上与 $t=\frac{\pi}{4}$ 对应的点的直角坐标.

本章小结

I 知识结构



II 思考与交流

通过下列问题的思考和分析,总结本章所学主要知识,体会参数方程在解决某些问题中的作用和方便之处,总结建立轨迹方程的基本思路和方法.

1. 掌握直线和圆的参数方程,学会参数方程和普通方程的互化.
2. 掌握圆锥曲线的参数方程,通过具体问题的分析,体会用参数方程解决某些问题(如距离问题)时的方便之处.
3. 掌握摆线和圆的渐开线的参数方程,知道它们的图形的某些性质.
4. 分析上面建立曲线的参数方程的过程,总结用向量方法建立运动轨迹的参数方程的基本思路和步骤.
5. 通过观看“图形演示”,学习“阅读与欣赏”,了解曲线的各种表现形式,体会从实践中抽象出数学问题的过程及数学在实践中的应用价值.

III 巩固与提高

1. 写出倾斜角为 $\frac{2}{3}\pi$, 且过点 $(0, 1)$ 的直线的参数方程.
2. 直线过点 $(-1, 2)$, 且与向量 $(-2, 1)$ 平行, 求此直线的参数方程.
3. 写出圆心在点 $(1, -2)$, 半径为 3 的圆的参数方程.

4. 指出下列参数方程表示什么曲线, 并用描点法画出它们的图形:

$$(1) \begin{cases} x=1+4\cos t \\ y=-2+4\sin t \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x=5\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$$

5. 动点 M 作匀速直线运动, 它在 x 轴和 y 轴方向上的分速度分别为 6 和 8, 运动开始时位于点 $P(1, 2)$, 求点 M 的轨迹的参数方程.

6. 已知弹道曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=2t\cos\frac{\pi}{6} \\ y=2t\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

(1) 求炮弹从发射到落地所需的时间;

(2) 求炮弹在运动中达到的最大高度.

7. 设直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=4-t \\ y=-2\sqrt{3}+\sqrt{3}t \end{cases}$$

在直线上求一点 P , 使点 P 到点 $A(4, -2\sqrt{3})$ 的距离为 4.

8. 设圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=4+2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$$

直线 $y=kx$ 与圆相切, 求该直线的倾斜角.

9. 已知两直线的方程分别为

$$x-y-2\sqrt{3}=0 \quad \text{和} \quad \begin{cases} x=1+t \\ y=-5+\sqrt{3}t \end{cases}$$

求两直线的交点与点 $P(1, -5)$ 的距离.

10. 设方程

$$\begin{cases} x=t+2\cos\theta \\ y=2t+\sin\theta \end{cases}$$

(1) 当 $t=1$ 时, θ 为参数, 此时方程表示什么曲线? 把参数方程化为普通方程;

(2) 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, t 为参数, 此时方程表示什么曲线? 把参数方程化为普通方程.

11. 设直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t \end{cases}$$

求点 $P(-1, 1)$ 到直线的距离.

12. 一直线过点 $(1, 0)$, 且与向量 $(1, 2)$ 平行, 求直线与圆 $x^2+y^2=4$ 的交点.

13. 由圆 $x^2+y^2=9$ 上动点 M 向 x 轴作垂线, 交 x 轴于点 N , 设 P 为线段 MN 的中点,

求点 P 的轨迹方程.

14. 设椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$$

求椭圆上的动点 P 到直线 $x-y-4=0$ 的最大距离.

IV 自测与评估

1. 一直线过点 $(2, 1)$, 与向量 $(-1, 1)$ 平行:

- (1) 求直线的参数方程;
- (2) 求点 $P(-1, -2)$ 到直线的距离.

2. 设圆的方程为

$$\begin{cases} x=1+2\cos \theta \\ y=-1+2\sin \theta \end{cases}$$

求直线 $x-y-2=0$ 与圆的交点.

3. 指出下列参数方程表示什么曲线, 并简述相应图形的性质:

$$(1) \begin{cases} x=-1+2\cos t \\ y=-2+2\sin t \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x=3\cos t \\ y=7\sin t \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$$

4. 一颗人造地球卫星的运行轨道是一个椭圆, 它的长轴长为 15 565 km, 短轴长为 15 443 km. 取椭圆中心为坐标原点, 求卫星轨道的参数方程.

5. 如图 2-21 所示, 齿轮的齿廓线 \widehat{AB} 为圆的渐开线的一段弧. 已知此渐开线的基圆的直径为 225 mm, 求此渐开线的参数方程.

6. 直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=-3+4t \\ y=3+3t \end{cases}$$

它与圆 $x^2+(y-4)^2=16$ 交于 A, B 两点, 求线段 AB 的长.

7. 设 $P(x, y)$ 为圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 上的动点, 求 $2x+y$ 的最大值和最小值.

8. 在椭圆 $4x^2+9y^2=36$ 上求一点 P , 使点 P 到直线 $x+2y+36=0$ 的距离最小.

9. 过点 $P(0, 1)$ 的动直线与抛物线 $y=x^2$ 交于 A 和 B 两点, 求线段 AB 的中点 M 的轨迹方程 (参数方程).

[本专题的学习总结报告]

1. 知识的总结.

在做好极坐标和参数方程两章小结的基础上, 思考本专题与平面解析几何等其他内容

之间的联系, 深入理解数形结合的思想方法.

2. 拓展.

在观看“图形演示”和学习“阅读与欣赏”的基础上, 总结建立轨迹方程的思路、方法和步骤, 了解各类摆线之间的联系与区别. 力求通过调查研究、访问求教、收集摆线应用的实例, 认识数学实际应用的价值.

3. 写出学习本专题的体会和感想.



星形线和内摆线

1. 星形线的参数方程

一轴承的剖面如图 2-24 所示, 小圆表示滚珠, 半径为 r , 大圆表示轴瓦, 半径为 $a=4r$. 设想大圆固定, 而小圆在大圆内无滑动地滚动. 小圆上的一定点 M 在运动中的轨迹为一条曲线, 称为星形线. 下面推导它的参数方程.

取大圆圆心为坐标原点. 设小圆的定点 M 开始时位于点 A 处, x 轴正方向为向量 \overrightarrow{OA} 的方向. 小圆滚动 α 角后, 圆心在 C 点, 与大圆的切点为 B , 小圆上的定点 M 的位置如图 2-24 所示.

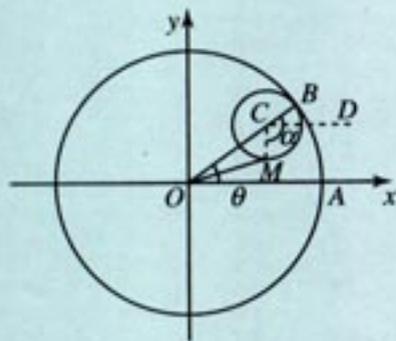


图 2-24

因为是无滑动的滚动, 所以 $\widehat{BM} = \widehat{AB}$. 记 $\theta = \angle AOB$, 由 $\widehat{BM} = r\alpha$, $\widehat{AB} = a\theta = 4r\theta$ 得

$$r\alpha = 4r\theta.$$

由此知

$$\alpha = 4\theta.$$

作 CD 平行于 x 轴, 则 $\angle BCD = \theta$, 得

$$\angle DCM = \angle BCM - \angle BCD = \alpha - \theta = 3\theta.$$

由此知 CM 与 x 轴正向形成的任意角为 -3θ . 由

$$|OC| = a - r = 3r,$$

用向量的坐标表达式, 得

$$\overrightarrow{OC} = (3r\cos\theta, 3r\sin\theta),$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= (r\cos(-3\theta), r\sin(-3\theta)) \\ &= (r\cos 3\theta, -r\sin 3\theta).\end{aligned}$$

因此有

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}$$

$$= (3r\cos\theta + r\cos 3\theta, 3r\sin\theta - r\sin 3\theta).$$

用三角函数的三倍角公式

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta,$$

得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= (4r\cos^3\theta, 4r\sin^3\theta) \\ &= (a\cos^3\theta, a\sin^3\theta).\end{aligned}$$

另一方面

$$\overrightarrow{OM} = (x, y).$$

因此得星形线的参数方程

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\sin^3\theta \end{cases} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (2-14)$$

用描点法画出曲线, 如图 2-25 所示.

星形线关于 x 轴、 y 轴都对称.

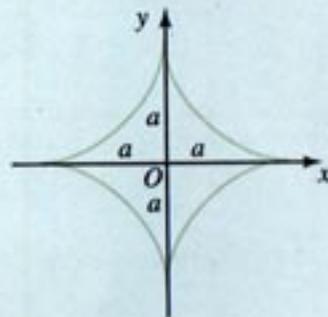


图 2-25

方程 (2-14) 易于化为直角坐标方程.

由

$$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos^2 \theta \\ y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \sin^2 \theta \end{cases}$$

二式两端分别相加, 得

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}. \quad (2-15)$$

至此已讨论了三种常见曲线(摆线、圆的渐开线、星形线)的参数方程, 它们的推导过程类似:

- (1) 建立合适的坐标系;
- (2) 取定某个角度(以弧度为单位)为参数;
- (3) 用三角知识写出相关向量的坐标表达式;
- (4) 用向量运算得到 \overrightarrow{OM} 的坐标表达式, 就得到了曲线的参数方程.

2. 内摆线

把上面描述的星形线的生成过程推广, 就可得到新的曲线.

设半径为 r 的动圆在半径为 a ($a > r$) 的定圆内无滑动地滚动, 则动圆圆周上一定点 M 将描绘出一条曲线, 称为内摆线. 特别地, 当 $a = 4r$ 时, 它就是星形线.

推导内摆线的参数方程的过程和星形线类似.

仍然用图 2-24, 注意到

$$a = \frac{a}{r}\theta, \quad |OC| = a - r,$$

CM 和 x 轴正向形成的角度为 $-\left(\frac{a}{r}-1\right)\theta$, 得

$$\overrightarrow{OC} = ((a-r)\cos\theta, (a-r)\sin\theta),$$

$$\overrightarrow{CM} = \left(r\cos\left(\frac{a}{r}-1\right)\theta, -r\sin\left(\frac{a}{r}-1\right)\theta\right),$$

得

$$\overrightarrow{OM} = \left((a-r)\cos\theta + r\cos\left(\frac{a}{r}-1\right)\theta,\right.$$

$$\left.(a-r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{a}{r}-1\right)\theta\right).$$

内摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (a-r)\cos\theta + r\cos\left(\frac{a}{r}-1\right)\theta \\ y = (a-r)\sin\theta - r\sin\left(\frac{a}{r}-1\right)\theta \end{cases}$$

令 $\frac{r}{a} = k$ ($0 < k < 1$), 得

$$\begin{cases} x = a(1-k)\cos\theta + k\cos\left(\frac{1}{k}-1\right)\theta \\ y = a(1-k)\sin\theta - k\sin\left(\frac{1}{k}-1\right)\theta \end{cases}$$

当 $k = \frac{1}{2}$ 时, 方程为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = 0 \end{cases}$$

这是大圆的一条直径(如图 2-26 所示), 即当大圆半径恰为小圆半径的 2 倍时, 动圆上一定点的轨迹是一直线, 这相当于把旋转运动转换为直线运动. 这一原理可用于机械设计.

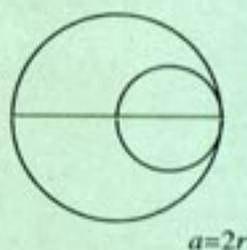


图 2-26

当 $k = \frac{2}{5}$ 和 $k = \frac{2}{3}$ 时, 内摆线的图形如

图 2-27 所示.

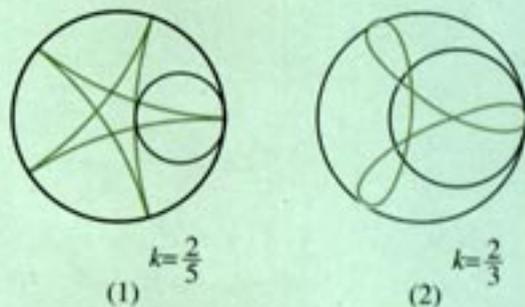


图 2-27

3. 变幅内摆线

在一般情况下, 我们讨论动圆在定圆内滚动时, 动圆所在平面内与动圆固定在一起的一点 M , 将描绘出一条什么样的曲线?

如果 M 点在动圆圆周上, 则 M 点的运

动轨迹就是上面讨论过的内摆线；如果 M 点在动圆内，则 M 点的运动轨迹称为短幅内摆线；如果 M 点在动圆外，则 M 点的运动轨迹称为长幅内摆线。这两种曲线统称为变幅内摆线，推导它的参数方程的过程和内摆线类似，不同之处仅在于图 2-24 中的 $|CM|$ 的长不是 r ，而是 d ， d 表示 M 点到动圆圆心的距离。变幅内摆线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a(1-k)\cos\theta + d\cos\left(\frac{1}{k}-1\right)\theta \\ y = a(1-k)\sin\theta - d\sin\left(\frac{1}{k}-1\right)\theta \end{cases}$$

当 $k = \frac{1}{4}$ 时，短幅内摆线和长幅内摆线的图形如图 2-28 所示。

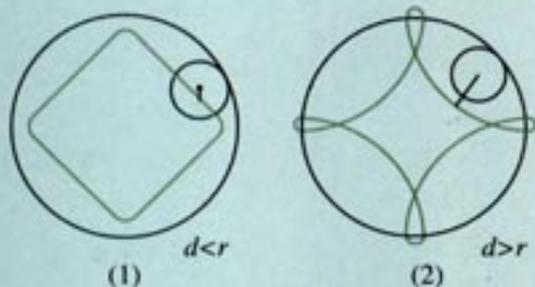


图 2-28

变幅摆线

一个圆沿着一条直线作无滑动的滚动时，求圆平面上圆内一定点 M 的轨迹方程。

M 点的运动轨迹称为短幅摆线，建立它的参数方程的过程和摆线类似。

如图 2-29 所示，设圆半径为 a ，点 M 到圆心的距离为 d ($d < a$)。开始时定点位于 M_0 ，滚动 t 角后处于图中位置，此时 $\widehat{AC} = at$ ，得

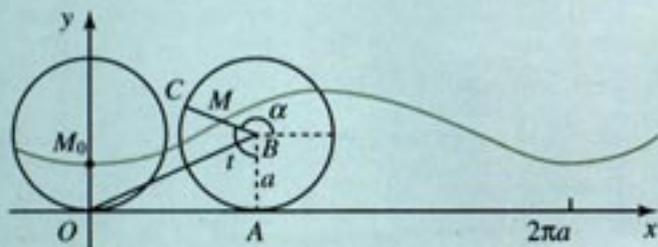


图 2-29

下面看一个特殊情况。

设动圆半径为 r ，定圆半径为 $a = 2r$ ，圆内一点 M ，它到动圆圆心的距离为 d ，在此情形下， M 点的运动轨迹是我们熟悉的椭圆。

在上面变幅内摆线的参数方程中，令 $k = \frac{1}{2}$ ，则方程变为

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}\cos\theta + d\cos\theta = (r+d)\cos\theta \\ y = \frac{a}{2}\sin\theta - d\sin\theta = (r-d)\sin\theta \end{cases}$$

这是长半轴为 $r+d$ ，短半轴为 $r-d$ 的椭圆，这一运动原理可用于一些特殊设备的设计，如卡丹转盘。

当 M 点在动圆外时，相应长幅内摆线还是椭圆，它的长半轴为 $d+r$ ，短半轴为 $d-r$ 。

[图形演示] (见课件) 星形线的生成过程。

$$|OA| = at,$$

$$\overrightarrow{OB} = (at, a).$$

又 $\alpha = \frac{3}{2}\pi - t$ ，得

$$\overrightarrow{BM} = (d\cos\alpha, d\sin\alpha)$$

$$= \left(d\cos\left(\frac{3}{2}\pi - t\right), d\sin\left(\frac{3}{2}\pi - t\right) \right)$$

$$= (-d\sin t, -d\cos t).$$

由此得

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$$

$$= (at - d\sin t, a - d\cos t).$$

又 $\overrightarrow{OM} = (x, y)$ ，得短幅摆线的参数方程

$$\begin{cases} x = at - d\sin t \\ y = a - d\cos t \end{cases}$$

此方程与摆线的参数方程类似，只要把此方

程中的 d 改为 a .

与此类似, 当圆在直线上滚动时, 圆所在平面上圆外一定点 M 的轨迹称为长幅摆线, 它的参数方程和短幅摆线相同, 只是此时 $d > a$, 即 M 点到原心的距离大于半径, 长幅摆线的图形如图 2-30 所示.

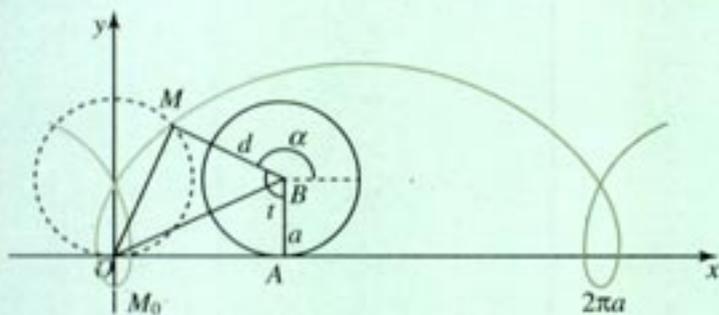


图 2-30

长幅摆线可用于农业机械设计中. 例如, 卧式翻土机的每把刀片划出的就是长幅摆线织成的面, 此时绕扣部分较大, 设计中要使刀片在绕扣最宽处切入土中, 翻松绕扣下半截的泥土后再露出地面, 四把刀片依次排开, 使相应绕扣部分互相衔接不致漏翻土地, 如图 2-31 所示.

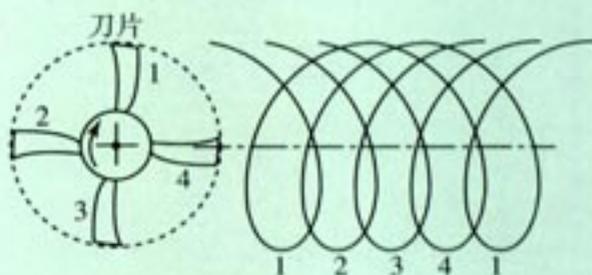


图 2-31

心形线和外摆线

设有两个半径相同的圆, 其中一个圆固定不动, 另一个圆绕定圆无滑动地滚动, 在动圆的圆周上有一定点 M , 求滚动过程中点 M 的轨迹方程.

M 点的轨迹为心形线, 就是在第一章的“阅读与欣赏”中讨论过的曲线. 下面推导心形线的方程, 先建立参数方程, 再转化为极坐标方程.

设圆半径为 a , 取定圆的圆心为坐标原点, 开始时两圆相切于 A 点, 射线 OA 为 x 轴的正半轴, 建立坐标系 (如图 2-32 所示). 当滚动角度 θ (以弧度为单位) 后, 两圆切于 B 点, 动圆圆心为 C , 定点 M 的位置如图所示. 记射线 CM 与 x 轴正向形成的任意角为 α (图中为负值). 由于无滑动, 得 $\widehat{AB} = \widehat{BM}$, 因为两圆的半径相等, 所以 $\angle AOB = \theta$, 从而得 $\alpha = -(\pi - 2\theta)$. 向量 \overrightarrow{CM} 的坐标表达式为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} &= (a \cos \alpha, a \sin \alpha) \\ &= (-a \cos 2\theta, -a \sin 2\theta),\end{aligned}$$

又 $\overrightarrow{OC} = (2a \cos \theta, 2a \sin \theta)$, 得

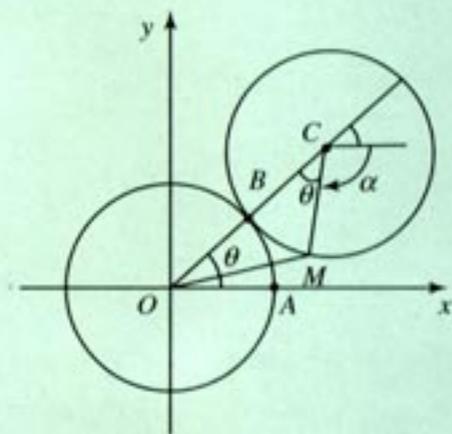


图 2-32

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \\ &= (2a \cos \theta - a \cos 2\theta, 2a \sin \theta - a \sin 2\theta).\end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} x = 2a \cos \theta - a \cos 2\theta \\ y = 2a \sin \theta - a \sin 2\theta \end{cases}$$

用倍角公式, 变形为

$$\begin{aligned}x &= 2a \cos \theta - a(2 \cos^2 \theta - 1), \\ x - a &= 2a \cos \theta - 2a \cos^2 \theta \\ &= 2a \cos \theta (1 - \cos \theta), \\ y &= 2a \sin \theta (1 - \cos \theta), \\ (x - a)^2 + y^2 &= 4a^2 (1 - \cos \theta)^2,\end{aligned}$$

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=2a(1-\cos\theta).$$

若以 A 为极点, x 轴为极轴, 则 $|AM|=\rho$, 由于极点 A 不是直角坐标系的原点, 因此要用坐标变换公式 (1-5), 由此可得

$$\rho=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

由几何知识易知 $\angle MAx=\theta$, 从而把方程化为极坐标形式

$$\rho=2a(1-\cos\theta).$$

这就是心形线的极坐标方程, 图形如图 2-33 所示.

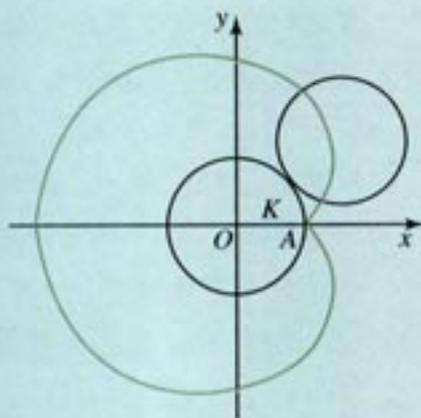


图 2-33

在一般情况下, 当定圆半径为 a , 动圆半径为 r , 动圆在定圆外滚动时, 动圆圆周

上一定点 M 的轨迹称为外摆线. 推导外摆线的参数方程的过程和上述情况类似, 它的参数方程为

$$\begin{cases} x=(a+r)\cos\frac{r}{a}\theta-r\cos\left(1+\frac{r}{a}\right)\theta \\ y=(a+r)\sin\frac{r}{a}\theta-r\sin\left(1+\frac{r}{a}\right)\theta \end{cases}$$

类似于内摆线的情况, 若 M 点位于动圆内或动圆外, 则运动过程中 M 点的轨迹为变幅外摆线.

[思考与讨论]

回顾“阅读与欣赏”, 思考下面的问题.

1. 摆线是如何生成的? 短幅摆线和长幅摆线是如何生成的? 推导它们的参数方程的过程有何异同?

2. 星形线是如何生成的? 内摆线是如何生成的? 短幅内摆线和长幅内摆线如何生成?

3. 心形线是如何生成的? 外摆线及短幅外摆线、长幅外摆线如何生成?

4. 比较摆线和星形线的参数方程的推导过程, 分析总结方程推导过程的异同点.

贝努利兄弟

雅科布·贝努利 (Jacob Bernoulli) 是瑞士数学家, 1654 年 12 月 27 日生于巴塞尔, 1705 年 8 月 16 日卒于巴塞尔.



雅科布·贝努利最初按父亲的意愿学习神学, 雅科布·贝努利但当他读了笛卡儿 (Descartes)、沃利斯 (Wallis) 等人的著作后, 对数学产生了浓厚的兴趣. 他的数学几乎是无师自通的, 他在荷兰和英国旅行期间, 结识了一些知名的数学家, 并成了莱布尼兹 (Leibnitz) 的好友, 从此便和莱布尼兹有频繁的书信往来,

共同探讨微积分等问题. 雅科布·贝努利从 33 岁到逝世的 18 年时间, 一直是巴塞尔大学的教授, 开始是实验物理学教授, 后来成为数学教授.

雅科布·贝努利在数学领域里作出了卓越的贡献, 他是用微积分方法求解常微分方程的先驱者之一, 在微分方程中有以他命名的贝努利方程. 他研究过无穷级数, 独立地发现了调和级数的发散性, 给出了系数中包含贝努利数的 $\tan x$ 的幂级数展开式, 他写的《关于无穷级数及其有限和的算术应用》被认为是级数理论方面的第一部教科书. 在数论中, 他提出了很有影响的贝努利数和贝努利多项式.

雅科布·贝努利的名著《推测术》的出版是概率论发展史中的一件大事。此书是把概率论建立在稳固的理论基础之上的首次尝试，其中给出了著名的大数定律，从而使贝努利的名字载入数学史册。他自己也为发现这个定理而感到自豪，他曾说：“这个问题我已经压了20年没有发表，现在打算把它公诸于世了，它又难又新奇，但它有极大的用处，以致在这门学科的所有其他分支中都有很高的价值和位置。”为了纪念他的这个发现，人们把它命名为贝努利定理。

雅科布·贝努利提出并讨论了等周问题，也是研究变分学的数学家之一。他给出了直角坐标和极坐标的曲率半径公式，指出某些高次曲线用极坐标表示比较简单，且便于研究，这也是系统地使用极坐标的开始。他研究过许多特殊曲线，例如，把悬链线的研究扩展到密度可变的链和在有心力作用下的链。他对等时曲线作过深入的研究，弄清楚原来就是尖点处有垂直切线的半三次抛物线。他发现和研究了双纽线——到两定点（焦点）距离之积等于常量 a^2 的曲线。特别是他对对数螺线进行了极为深入的研究，发现这种曲线经过多种变换后仍是对数螺线。例如，对数螺线的渐屈线和渐伸线仍是对数螺线；从极点引切线的垂线，其垂足的轨迹也是对数螺线；以极点为发光点经对数螺线反射后得到无数根反射线，和所有这些反射线相切的曲线还是对数螺线。从而他非常赞叹这种曲线的美妙特性，以致他在遗嘱里要求把对数螺线刻在他的墓碑上并题颂词“虽经沧桑，依然故我”。

约翰·贝努利 (Johann Bernoulli) 1667年8月6日生于巴塞尔，1748年1月1日卒于巴塞尔。他是雅科布·贝努利之弟。年轻时经商，后在其兄雅科布的指导下研究数



约翰·贝努利

学和医学。27岁时获得巴塞尔大学博士学

位，其论文是关于肌肉的收缩问题。不久他迷上了微积分学，并且很快掌握了它。28岁时任荷兰格罗宁根大学数学物理教授，当其兄雅科布去世后，他继任巴塞尔大学数学教授达43年之久，并被选为彼得堡科学院名誉院士。

约翰·贝努利是莱布尼兹的好友和热烈拥护者，他为维护莱布尼兹的学术思想参加了辩论并发挥了极大作用。通过这场辩论大大地充实和丰富了微积分学。例如，他在研究分子分母同时趋于零的分式的极限时，发现了一个重要法则，这就是微积分教材上的洛比塔法则，他于1694年写信告诉了洛比塔 (L'Hospital)。他在求曲线长度和计算积分时，利用某些几何性质，完善和发展了计算积分的一套方法，如有理分式积分法。他还研究了齐次微分方程的解法、常系数微分方程的解法。他写的《积分法数学讲义》是微积分发展中的重要著作，他也因此成为数学界最有影响的人物之一。

约翰·贝努利是一位多产的数学家。在几何上给出了空间坐标的定义，研究过多种特殊曲线。在力学上提出了虚拟速度原理。他曾以级数为工具计算曲线的长度和区域的面积，特别是在1696年，他曾向欧洲数学家提出一个挑战性的数学问题：“设在垂直平面内有任意两点，一个质点受地心引力的作用，自较高点下滑到较低点，不计摩擦，问沿什么曲线用时最短。”——这就是数学史上有名的“最速降线问题”。当时许多数学家都被这个问题的新颖所吸引。牛顿 (Newton)、莱布尼兹、洛比塔及贝努利兄弟分别给出了正确答案（是过两点的摆线的一段弧）。稍后，欧拉 (Euler) 和拉格朗日 (Lagrange) 进一步找到这类问题的普遍解法，由此引出一个数学新分支——变分学。

约翰·贝努利是一位教育大师，在培养人才方面业绩斐然。18世纪首屈一指的数学家欧拉和法国著名数学家洛比塔都是他的

得意门生。他的三个儿子和两个孙子都是数学家。贝努利家庭是数学史上最著名的数学家族，为建立和发展近代数学、物理和力学创立了不朽的功勋。

参考文献

(1) 高级中学实验课本，数学 IV（下

册），北京：人民教育出版社，1989。

(2) 王敬庚，解析几何方法漫谈，郑州：河南科学技术出版社，1997。

(3) 李心灿编，微积分的创立者及其先驱，北京：高等教育出版社，2002。

附录

部分中英文词汇对照表

坐标	coordinate
直角坐标系	rectangular coordinates system
伸缩变换	stretching
极坐标	polar coordinates
极坐标方程	polar coordinates equation
螺线	spiral
阿基米德螺线	spiral of Archimedes
心形线	cardioid
双纽线	lemniscate
柱坐标	cylindrical coordinates
球坐标	spherical coordinates
经度	longitude
纬度	latitude
参数方程	parametric equation
摆线	cycloid
渐开线	involute
星形线	asteroid

后记

根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持。在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志。

本套高中数学实验教科书（B版）的总指导为丁尔陞教授。从教材立项、编写、送审到进入实验区实验的过程中，在丁尔陞、孙瑞清、江守礼、房艮孙、王殿军等专家教授的指导下，经过实验研究组全体成员的努力，基本上完成了“课标”中各模块的编写任务，并通过了教育部的审查。

山东、辽宁等实验区的教研员和教师在实验过程中，对教材编写的指导思想、教材内容的科学性、基础性、选择性以及是否易教、易学等诸方面，进行了审视和检验，提出了许多的宝贵意见，并针对教材和教学写出了大量的论文。我们在总结实验的基础上，逐年对教材进行认真的修改，使教材不断的完善。现在所取得的成果，是实验研究组全体成员、编者，实验区的省、市、县各级教学研究员及广大数学教师集体智慧的结晶。

各实验区参加教材审读、研讨及修改主要成员有：

韩继清、常传洪、尹玉柱、秦玉波、祝广文、尚凡青、杨长智、田明泉、邵丽云、于世章、李明照、胡廷国、张颀、张成钢、李学生、朱强、窦同明、姜传祯、韩淑勤、王宗武、黄武昌。

刘莉、宋明新、高锦、赵文莲、王孝宇、周善富、胡文亮、孙家逊、舒凤杰、齐力、林文波、教丽、刘鑫、李凤、金盈、潘戈、高钧、魏明智、刘波、崔贺、李忠、关玲、郝军、郭艳霞、董晖、赵光千、王晓声、王文、姚琳。

在此，特向参与、帮助、支持这套教科书编写的专家、学者和教师深表谢意。

我们还要感谢实验区的教育行政和教研部门，以及使用本套教材的学校领导和师生们。

让我们与一切关心这套教材建设的朋友们，共同携起手来，为建设一套具有中国特色的高中数学教材而努力。

我们的联系方式如下：

电话：010-58758523 010-58758532

电子邮件：longzw@pep.com.cn